

THESE

PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE
NANCY I POUR L'OBTENTION DU
GRADE DE
DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES
PAR PIERRE BERTRAND

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE MODELES MATHEMATIQUES
DE PLASMAS NON COLLISIONNELS

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 14 JUIN 1972, DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	A. HADNI	Président
	M. TROCHERIS	Invités
	E. CANOBBIO	
	G. BAUMANN	Examineurs
	M. FEIX	

THESE

PRESENTEE A L'UNIVERSITE DE
NANCY I POUR L'OBTENTION DU
GRADE DE
DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES
PAR PIERRE BERTRAND

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE MODELES MATHEMATIQUES
DE PLASMAS NON COLLISIONNELS**

SOUTENUE PUBLIQUEMENT LE 14 JUIN 1972, DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

MM.	A. HADNI	Président
	M. TROCHERIS	Invités
	E. CANOBBIO	
	G. BAUMANN	Examineurs
	M. FEIX	

THESE

PRESENTÉE A L'UNIVERSITÉ DE
NANCY - POUR L'OBTENTION DU
GRADE DE
DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES
PAR M. RICHARD BERNARD

ORIGINATION A L'ETUDE DE MOYENS MATHEMATIQUES

DE PÉRIODES NON ÉLÉMENTAIRES



SOUTIENUE PUBLIQUEMENT LE 14 JUILLET 1902 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

Président	M. A. HADAMARD
Membres	M. TROCHERIS E. CANOBBIO G. BAUMANN M. FELIX

A ma femme

A mes parents et beaux-parents

A Monsieur le Professeur G. BAUMANN

A Monsieur M. FEIX Maître de Recherches

En témoignage de ma profonde gratitude

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique théorique de Monsieur le Professeur BAUMANN, qui a bien voulu m'y accueillir à un moment déterminant pour mon avenir. Je tiens à lui en exprimer ma profonde reconnaissance, ainsi que pour l'intérêt et le soutien qu'il n'a cessé de m'accorder.

Il m'est également agréable, d'exprimer ma vive gratitude à Monsieur FEIX, Maître de Recherches au Centre National de la Recherche Scientifique. Il a inspiré ce travail et il a toujours manifesté beaucoup d'enthousiasme pendant sa réalisation.

Je suis très reconnaissant envers Monsieur le Professeur HADNI d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse. Je l'en remercie bien vivement.

Ma reconnaissance s'adresse également à Monsieur le Professeur TROCHERIS, Chef du département de la Physique des Plasmas et de la Fusion contrôlée de l'Association Euratom-CEA, pour m'avoir fait l'honneur de venir à Nancy participer au jury.

Le Docteur CANOBBIO, Physicien de l'Association Euratom-CEA à Grenoble, a accepté la tâche ingrate d'examiner ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de mes vifs remerciements pour les critiques constructives qu'il a formulées, ainsi que pour sa participation au jury.

Je remercie, enfin, toutes les personnes qui m'ont aidé, ainsi que l'équipe de l'Atelier de Documentation Universitaire dont la compétence a permis de mener à bien l'impression de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 : <u>Problèmes et modèles en théorie des plasmas non collisionnels.</u>	4
1. Phénomènes individuels et phénomènes collectifs.	
2. Les problèmes.	
3. La simulation numérique.	
4. Les modèles spéciaux.	
CHAPITRE 2 : <u>Propriétés générales du modèle "water bag".</u>	22
1. Equations de base.	
2. Connexion avec le modèle hydrodynamique.	
3. Propriétés énergétiques du "water bag".	
4. Filamentation et comportement asymptotique des distributions dans l'espace des phases.	
5. Mécanique statistique des "fluides" de l'espace des phases.	
6. Conclusion.	
CHAPITRE 3 : <u>Analyse linéaire du modèle "water bag".</u>	46
1. La constante diélectrique du "water bag".	
2. Construction d'une base complète de fonctions propres du "water bag" pour l'étude des oscillations libres.	
3. Application au problème des oscillations forcées : impédance d'un condensateur dans un plasma.	
4. Remarques.	

CHAPITRE 4 : <u>Oscillations de plasma : Problèmes faiblement non linéaires et comparaison de modèles.</u>	67
1. Le traitement non linéaire des oscillations de plasma par le modèle "water bag".	
2. Les modèles hiérarchisés dans le traitement des oscillations.	
3. Etude de l'invariant adiabatique P_n^{-3} . Influence des conditions initiales.	
4. Conclusion.	
CHAPITRE 5 : <u>Le modèle "water bag" et les plasmas inhomogènes.</u>	103
1. Application du modèle "water bag" à l'étude des plasmas inhomogènes.	
2. "Water bag" à un contour : Ondes électrostatiques dans un plasma inhomogène.	
3. Instabilité double-faisceau dans un plasma inhomogène.	
4. Recherche d'un critère de stabilité.	
5. Conclusion.	
CONCLUSION GENERALE.	147
BIBLIOGRAPHIE	151

INTRODUCTION

Le mot plasma est utilisé en physique pour désigner un quatrième état de la matière, c'est-à-dire un gaz à très haute température, dans lequel un grand nombre d'atomes sont ionisés.

Si la physique des plasmas a pris ces dernières années une extension considérable, c'est à cause essentiellement des programmes de recherche en fusion thermonucléaire contrôlée. Une autre raison à ce développement réside dans le fait que l'univers est composé essentiellement de matière ionisée. Les étoiles, le soleil, l'ionosphère sont des plasmas. Enfin la physique des plasmas a des applications importantes dans les phénomènes de décharges gazeuses ou de conversion thermo-électrique.

Dans ce travail, nous appellerons plasma, un gaz complètement ionisé et formé seulement de deux types de particules : les électrons et les ions. Un tel milieu est susceptible de présenter une grande variété de mouvements oscillatoires. Si nous ne nous intéressons qu'à la partie haute-fréquence du spectre d'oscillations du plasma, celui-ci pourra être assimilé à un gaz de N électrons baignant dans un continuum chargé positivement, et formé par les ions, qui du fait de leur plus grande inertie restent immobiles.

Les électrons interagissent ainsi par l'intermédiaire de forces de COULOMB à longue portée. Chaque particule est donc sous l'influence simultanée d'un grand nombre d'autres particules, et le plasma répond à toute perturbation d'une manière collective. A condition que la température soit suffisamment élevée et la densité de particules suffisamment faible, ces phénomènes collectifs sont décrits par l'équation de VLASOV, encore appelée équation de BOLTZMANN sans collisions.

Un effort théorique important a été entrepris sur cette équation. Dans ces travaux, le plasma est décrit comme un milieu non collisionnel, les conditions aux limites sont fortement idéalisées, les phénomènes atomiques n'entrent pas en ligne de compte. Cette approche, qui peut sembler à priori trop simpliste et non réaliste, se révèle en fait très fructueuse pour la prédiction et l'explication d'un grand nombre de phénomènes, tant en Astrophysique que dans les plasmas de laboratoire. Mais les difficultés mathématiques inhérentes à l'équation de VLASOV font qu'un grand nombre de phénomènes sont loin d'être complètement ou même partiellement élucidés : (effets non linéaires, oscillations en milieu inhomogène, etc...). C'est donc l'étude théorique de ces effets collectifs qui sera au centre de ce travail.

Dans une première partie, après avoir précisé le champ d'application de l'équation de VLASOV - et nous verrons qu'il est fort vaste - nous examinerons les principales difficultés de cette équation non linéaire. Nous verrons alors comment la notion de modèle, qui consiste à simplifier le problème dès le début en introduisant certaines hypothèses, permet de traiter ce problème d'une manière rigoureuse, en contrôlant les hypothèses faites,

Un tel modèle a été récemment introduit en Physique théorique des plasmas, et a donné lieu à de nombreux travaux analytiques et numériques. C'est le modèle dit du "water bag", dont nous donnerons les principales propriétés dans le 2ème chapitre.

Dans les chapitres suivants, nous montrerons comment ce modèle permet d'aborder de façon fructueuse les 3 groupes de problèmes théoriques qui se posent lors de l'étude des effets collectifs dans les plasmas.

- analyse linéarisée d'un plasma homogène
- effets non linéaires, et plus précisément étude des faibles non-linéarités autour d'un équilibre spatialement homogène
- étude des oscillations de plasma en milieu inhomogène, et en particulier, recherche de la stabilité d'équilibres inhomogènes.

CHAPITRE I

PROBLEMES ET MODELES EN THEORIE DES PLASMAS NON COLLISIONNELS

1. PHENOMENES INDIVIDUELS ET PHENOMENES COLLECTIFS.

Nous considérons un plasma formé de N électrons de charge e et de masse m , repérés par leurs coordonnées $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ et se déplaçant, conformément aux lois de la mécanique classique, sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}_i(\vec{r}_i, t)$. Ce champ est supposé dériver du potentiel coulombien entre les électrons et du potentiel $\phi_{ion}(\vec{r}_i)$, extérieur aux électrons, et créé par le continuum immobile des ions. Nous supposons qu'il n'y a pas de champ électromagnétique d'origine externe, appliqué au plasma. Nous pouvons alors écrire

$$\vec{E}_i = - \text{grad } \phi_i$$

$$\text{avec } \phi_i = \phi_{ion} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

L'analyse statistique d'un tel système repose sur la considération d'un ensemble de configurations représentant chacune un état possible du système, selon les conditions initiales. Chaque configuration est représentée, à l'instant t , par un point dans l'espace des phases à $6N$ dimensions, et l'ensemble par un nuage. Certaines configurations étant plus probables que d'autres, nous pouvons introduire la distribution de probabilité de l'ensemble

$$D_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, t)$$

D'après le théorème bien connu de LIOUVILLE, le nuage qui représente l'ensemble se comporte comme un "fluide" incompressible dans l'espace des phases à $6N$ dimensions, et D_N obéit à l'équation de continuité, où E_i est le champ microscopique défini précédemment

$$\frac{dD_N}{dt} = \frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \cdot \text{grad}_{\vec{r}_i} D_N + \frac{e}{m} \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot \text{grad}_{\vec{v}_i} D_N = 0$$

Cette équation qui comporte un très grand nombre de variables peut considérablement se simplifier dans la limite suivante

$$\begin{aligned} e &\rightarrow 0 & e/m &= \text{constante} \\ m &\rightarrow 0 & n_0 e &= \text{constante} \\ n_0 &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

n_0 désignant la densité électronique. Dans cette limite le plasma devient un "fluide" continu, où l'individualité des particules a été détruite, et où ne subsistent que les effets purement collectifs.

Mais nous pouvons toutefois remarquer que le terme "particule" a encore un sens dans la mesure où l'on peut parler de sa vitesse, qui reste invariante dans le passage à la limite "fluide".

Il est intéressant de noter que ce "fluide" peut être obtenu par un processus de découpage, dans lequel chaque électron est divisé

en deux parties, puis les deux moitiés obtenues sont à leur tour divisées en deux, et ainsi de suite.

Dans ce découpage, la vitesse des particules est conservée, de même que le rapport T/m où T désigne la température absolue. Ainsi, certaines quantités caractéristiques demeurent inchangées:

- la fréquence propre du plasma ω_p , fréquence d'oscillation fondamentale d'un plasma indéfini. Sa valeur est donnée par

$$\omega_p^2 = \frac{n_o e^2}{\epsilon_o m}$$

(il s'agit en fait d'une pulsation, la dénomination "fréquence" de plasma étant, par abus de langage, couramment employée par les physiciens du plasma)

- la longueur de DEBYE D , qui caractérise l'effet d'écran sur le champ d'une particule de signe contraire, et dont la valeur, à l'équilibre thermique est donnée par

$$D^2 = \frac{\epsilon_o K_B T}{n_o e^2}$$

où K_B est la constante de BOLTZMANN, est T la température absolue.

Dans cette limite "fluide", il a été montré /1/ que l'équation de LIOUVILLE à 6N dimensions pouvait se ramener à une équation de LIOUVILLE à 6 dimensions, pour la fonction de distribution à une particule $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, soit

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} f + \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \text{grad}_{\vec{v}} f = 0 \quad (1a)$$

C'est l'équation de VLASOV /2/ ou encore équation de BOLTZ-MANN sans collisions. Il faut toutefois remarquer que "sans collisions" ne signifie pas sans interactions, les interactions entrant en ligne de compte par l'intermédiaire du champ $\vec{E}$ dont nous allons préciser la signification.

La fonction $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ est telle que $f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ représente le nombre probable d'électrons, à l'instant t , dans le volume $d^3\vec{r} d^3\vec{v}$ de l'espace des phases à 6 dimensions.

Le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel ϕ qui est tel que

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_{ion}(\vec{r}) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left\{ \int f(\vec{r}', \vec{v}', t) d^3\vec{v}' \right\} d^3\vec{r}'$$

Sous cette forme, en plus du potentiel dû aux ions, nous reconnaissons l'expression du potentiel créé par la distribution continue de charges

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v}$$

qui n'est autre que la densité moyenne électronique au point $\vec{r}$. Ainsi, le champ microscopique $\vec{E}_1$ de l'équation de LIOUVILLE, est remplacé par le champ macroscopique autocohérent $\vec{E}$, qui peut être obtenu plus simplement par l'équation de POISSON, soit

$$\text{div } \vec{E} = \frac{e}{\epsilon_0} \{n(\vec{r}, t) - n_1\} = \frac{e}{\epsilon_0} \left\{ \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3\vec{v} - n_1 \right\} \quad (1b)$$

où n_1 désigne la densité ionique.

Sous la forme où nous avons écrit le potentiel ϕ de l'équation

de VLASOV, la quantité $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ peut être interprétée comme la densité d'un "fluide" dans l'espace des phases à 6 dimensions. Et de même que l'équation de LIQUILLE représentait l'évolution d'un "fluide" incompressible dans l'espace des phases à 6N dimensions, l'équation de VLASOV représente un "fluide" incompressible, de densité f dans l'espace des phases à 6 dimensions. Cette importante propriété sera mise à profit dans le modèle "water bag".

Le processus mathématique de passage à la limite "fluide" est caractérisé par un paramètre de petitesse défini par

$$g = \frac{1}{n_0 D^3}$$

Ce paramètre est égal à zéro dans la limite des effets collectifs. Lorsque g est très petit, l'équation de VLASOV possède, en fait, un deuxième membre non nul, de forme compliquée, dont l'ordre de grandeur par rapport au premier membre, est g . Ce paramètre est une mesure de l'importance des effets individuels (collisions) par rapport aux effets collectifs. Ainsi, si nous appelons t_p la constante de temps des effets collectifs (de l'ordre de ω_p^{-1}) et t_r le temps de relaxation dû aux collisions (de l'ordre de l'inverse de la fréquence de collisions), nous aurons

$$t_r \sim t_p g^{-1}$$

En d'autres termes, l'équation de VLASOV ne peut plus décrire les phénomènes après un temps de l'ordre de ω_p/g .

Le paramètre g est en général très petit pour beaucoup de plasmas, comme nous pouvons le constater sur le tableau suivant

	$n_o (\text{cm}^{-3})$	$T(^{\circ}\text{K})$	$\omega_p (\text{s}^{-1})$	$D(\text{cm})$	g
Décharges gazeuses	10^{12}	10^4	6.10^{10}	7.10^{-4}	3.10^{-3}
Plasma thermonucléaire	10^{14}	10^8	6.10^{11}	7.10^{-3}	3.10^{-8}
Couronne solaire	10^6	10^6	6.10^7	7	3.10^{-9}
Plasma interstellaire	1	10^4	6.10^4	7.10^2	3.10^{-9}

Il est donc remarquable de constater que beaucoup de plasmas se comportent comme un milieu continu. Ceci est en fait dû à la longue portée des forces de COULOMB qui introduisent des interactions collectives faisant intervenir un grand nombre de particules. Ce comportement collectif est complété, et dans un certain sens contrebalancé par le libre mouvement thermique des particules, représenté dans l'équation de VLASOV par le terme convectif $\vec{v} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} f$. C'est cette opposition qui détermine le comportement global du plasma.

Un plasma peut être le siège d'une grande variété de mouvements oscillatoires. Parmi ceux-ci, nous ne nous intéressons qu'à ceux tels que le champ électrique soit parallèle à la direction de la propagation.

Nous allons de plus apporter une restriction au problème : dans tout ce qui suit, nous ne nous intéressons qu'aux mouvements se propageant sur une seule dimension. Le mouvement des particules dans le plan perpendiculaire au vecteur d'onde n'intervient pas. Aussi, nous pouvons intégrer la fonction de distribution sur les composantes de $\vec{r}$ et $\vec{v}$ perpendiculaires au vecteur d'onde. Nous désignons alors par x la coordonnée de position et par v la composante de la vitesse dans la

direction considérée. Le système de VLASOV-POISSON s'écrit donc sous la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv - \frac{en_i}{\epsilon_0} \quad (2b)$$

Le modèle décrit par ce système d'équations est unidimensionnel. Il est évidemment plus simple que le modèle tridimensionnel, puisque il ne comporte plus que trois variables au lieu de sept. Mais on peut se demander quel rapport existe entre la solution unidimensionnelle et la solution à trois dimensions.

Nous sommes alors concernés par le problème plus général de l'utilité des modèles de physique mathématique à une dimension /3/.

Dans l'étude de ces modèles unidimensionnels, qui sont beaucoup plus simples que les modèles à trois dimensions, nous devons savoir, comme le soulignent LIEB et MATTIS /3/, si "nous ne faisons que battre en retraite vers la fantaisie pure ou les pures mathématiques; ou alors ces modèles ne sont-ils pas pour nous, une voie d'accès pour la compréhension des phénomènes naturels".

Les résultats obtenus dans l'étude de ces modèles ont amplement démontré que la deuxième hypothèse est la bonne. Les modèles unidimensionnels apportent une contribution importante à la réalité tridimensionnelle. Ainsi, en ce qui nous concerne, le fait de considérer des ondes planes ne diminue en rien la généralité du problème, du moins dans une théorie linéaire où tous les modes sont indépendants. Cependant, il ne faut pas cacher qu'il s'agit d'une restriction plus importante dans les théories non linéaires qui font intervenir des couplages de modes.

Dans le paragraphe suivant, nous allons rappeler brièvement les problèmes posés par la résolution du système d'équations de VLASOV-POISSON (2).

2. LES PROBLEMES

2.1. La théorie linéaire de LANDAU

Le système (2) est non linéaire à cause du terme $E\partial f/\partial v$. On peut toutefois observer que toute fonction du type $f(x,v,t) = n_0 F_0(v)$ est une solution stationnaire, et représente un équilibre homogène, de densité électronique uniforme n_0 . La fonction $F_0(v)$ qui n'est pas nécessairement une distribution de MAXWELL, est telle que $\int F_0(v) dv = 1$.

Le traitement linéarisé de LANDAU /4/ pour un plasma homogène, consiste à étudier les perturbations autour d'un équilibre uniforme décrit par $F_0(v)$, en posant

$$f(x,v,t) = n_0 F_0(v) + f_1(x,v,t)$$

avec $f_1 \ll n_0 F_0$, et à ne conserver que les termes du premier ordre en f_1 . Ce traitement est maintenant bien élucidé /5/ : toutes les propriétés du plasma sont décrites par la fonction diélectrique

$$\epsilon(k,\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_0/dv}{\omega - kv} dv \quad (3)$$

où ω est la pulsation, et k le nombre d'onde.

Ainsi, pour une perturbation initiale sur le mode k donné, le plasma réagit par des oscillations dont les fréquences, qui sont

solutions de l'équation de dispersion $\epsilon(k, \omega) = 0$, sont généralement des nombres complexes.

Deux résultats importants sont à signaler:

a) pour certaines fonctions $F_0(v)$, le plasma peut être le siège d'oscillations croissantes dans le temps. Il s'agit du phénomène d'instabilité, dont PENROSE /6/ a donné le critère d'existence. Pour qu'il y ait instabilité, la fonction $F_0(v)$ doit avoir un minimum local en v_0 tel que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0(v) - F_0(v_0)}{(v - v_0)^2} dv > 0 \quad (4)$$

b) pour des fonctions de distribution $F_0(v)$ stables, une racine de l'équation de dispersion est prépondérante si $kD \ll 1$. Sa partie réelle est donnée par la loi de BOHM-GROSS

$$\omega^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 D^2) \quad (5)$$

Sa partie imaginaire, dont l'ordre de grandeur pour la distribution de MAXWELL est $(\omega_p^3/k^3 D^3) \exp(-1/2k^2 D^2)$, correspond à un amortissement non collisionnel de l'onde. C'est le phénomène bien connu de l'amortissement de LANDAU.

Ce phénomène peut s'interpréter à la lumière du traitement de VAN KAMPEN-CASE /7/ /8/ qui est une alternative du traitement de LANDAU. Pour une valeur de k donnée, la solution de l'équation de VLASOV peut être représentée par la superposition d'une infinité de modes se comportant chacun comme $\exp(i\omega t)$, où l'ensemble des ω forme un spectre continu sur tout l'axe réel. Les divers modes se détruisent au cours du temps par mélange de phases, ce qui reconduit au phénomène d'amortissement LANDAU.

Nous devons également signaler une difficulté mathématique

du traitement de LANDAU. Pour une fonction de distribution quelconque, le nombre des racines de l'équation de dispersion $\epsilon(k, \omega) = 0$ est infini (les deux pôles $\pm \omega$ de LANDAU n'étant que les premières racines), et des difficultés de convergence peuvent se présenter dans la suite des calculs, en particulier sur la série

$$\sum B_j \exp(i\omega_j t)$$

dans laquelle les B_j sont les facteurs d'excitation associés aux racines ω_j pour k réel donné. DENAVIT /9/ a montré précisément que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \exp(i\omega_j t) \neq \sum_{j=1}^{\infty} B_j$$

Dans le cas d'oscillations forcées (créées par exemple par un système de grilles portées à des potentiels oscillant à une fréquence fixe ω) le problème est plus compliqué, du fait de la dispersion spatiale du plasma (ϵ est en effet fonction de k). Si ce problème est maintenant assez bien compris, il subsiste cependant des difficultés de calcul /10/ /11/.

En plus de ce problème d'oscillations forcées, il reste à résoudre les deux grandes classes de problèmes que nous allons examiner ci-après.

2.2. Le traitement linéarisé d'équilibres spatialement inhomogènes

Ces équilibres sont décrits par une fonction $f_0(x, v)$ dépendant à la fois de x et de v . Cela implique en particulier la propagation des ondes dans les couches limites et la généralisation du critère de PENROSE /4/. La méthode usuelle d'étude de l'évolution d'une perturbation est celle de l'équation intégrale /12/ /13/. Dans ce formalisme, en désignant par $E_1(x, \omega)$ la transformée de FOURIER sur le temps de la

perturbation du champ électrique, on obtient pour cette quantité l'équation intégrale

$$E_1(x, \omega) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m i \omega} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x', \omega) K(x, x', \omega) dx' \quad (6)$$

Malheureusement, le noyau $K(x, x', \omega)$ a une structure compliquée, en particulier dans le cas de particules piégées.

2.3. Le traitement non linéaire.

Ce dernier point forme un domaine de recherche immense. Le comportement faiblement non linéaire autour d'un plasma initialement homogène, c'est-à-dire l'étude des termes au delà du premier terme $f_1(x, v, t)$ envisagé dans la théorie linéaire, peut être abordé analytiquement par des méthodes de perturbation à tout ordre /14/; la théorie quasi linéaire /15/ /16/ peut également être utilisée. Mais ces méthodes sont limitées à des problèmes très faiblement non linéaires.

C'est alors que les méthodes numériques de simulation sur ordinateur peuvent être d'un grand intérêt.

3. LA SIMULATION NUMERIQUE

Comme nous venons de le voir, les lois de base en physique des plasmas sont bien connues; ce sont les complications mathématiques du problème à N corps qui nous arrêtent. Nous comprendrons alors aisément que le développement spectaculaire des ordinateurs ait apporté à cette branche un concours précieux, en permettant de résoudre numériquement le problème à N corps, réalisant ainsi une véritable "expérience numérique" qui complète (et éventuellement remplace) l'étude expérimentale.

Deux types de méthodes sont couramment utilisées.

3.1. Les méthodes lagrangiennes. /17/ /18/

Elles consistent à résoudre numériquement le mouvement de N particules en interaction. Pour des raisons évidentes de capacité de mémoires, on ne peut traiter qu'un nombre restreint de particules, ce qui exagère l'importance des effets individuels par rapport aux effets collectifs. La nécessité de découpler les constantes de temps des 2 effets, impose de prendre des valeurs de N de l'ordre de 10 000 au moins. Il faut donc disposer d'ordinateurs de grande capacité.

3.2. Les méthodes eulériennes.

Elles consistent à résoudre numériquement l'équation de VLA-SQV. Un traitement direct dans l'espace des phases /19/ présente de grandes difficultés car la fonction de distribution pour des temps de plus en plus grands, possède une microstructure de plus en plus compliquée. Ces difficultés ont pu être récemment surmontées /20/. Néanmoins, il est plus commode de travailler non pas sur $f(x,v,t)$, mais sur des transformées intégrales. Nous citons spécialement le développement en série de FOURIER-HERMITE qui semble avoir été le plus fructueux /21/-/22/

$$f(x,v,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{rs}(t) \exp(irk_0 x) H_s\left(\frac{v}{v_0}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{2v_0^2}\right) \quad (7)$$

où H_n est le polynôme d'HERMITE d'ordre n, et v_0 est une vitesse de référence quelconque, qui dans un plasma maxwellien peut être la vitesse moyenne d'agitation thermique. Dans l'espace des configurations, la formule (7) représente une série de FOURIER, ce qui impose d'enfermer le plasma dans une boîte périodique de longueur $L = 2\pi/k_0$. Le problème se ramène alors à la résolution d'un système d'équations différentielles pour les fonctions $a_{rs}(t)$. Signalons cependant que la nécessité de

représenter correctement $f(x,v,t)$ pendant des temps assez longs, impose de traiter un nombre important de polynômes d'HERMITE (de l'ordre de la centaine). On retombe alors sur le principal défaut de ces méthodes (par rapport aux méthodes lagrangiennes) qui réside dans la difficulté de conserver toute l'information contenue dans la donnée initiale de $f_1(x,v,t=0)$.

En revanche, ces méthodes, proches des théories analytiques, ont le gros avantage de pouvoir permettre l'étude de phénomènes fins (quasi-linéaires, etc...).

4. LES MODELES SPECIAUX.

Devant les difficultés analytiques et numériques posées par l'équation de VLASOV, une approche consiste à simplifier le problème dès le début, en introduisant des modèles spéciaux. Cette méthode se révèle en général très utile.

En effet, les modèles spéciaux sont ordinairement plus simples que l'équation de VLASOV, et permettent donc un traitement analytique plus rigoureux. De plus, il est possible de tester aisément ces théories par la simulation numérique de ces modèles.

4.1. Le modèle du plasma froid.

Ce modèle consiste à supposer que les électrons n'ont pas d'agitation thermique, et que toutes les particules possèdent la même vitesse $u(x,t)$ au même point. La fonction de distribution s'écrit alors

$$f(x,v,t) = n(x,t) \delta\{v - u(x,t)\} \quad (8)$$

où δ représente la distribution de DIRAC et $n(x,t)$ la densité électronique. Nous en déduisons immédiatement la constante diélectrique

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (9)$$

qui est indépendante du nombre d'onde k , et qui conduit immédiatement pour les oscillations électroniques à la relation $\omega^2 = \omega_p^2$.

En introduisant (8) dans l'équation de VLASOV (2) nous obtenons pour les quantités n et u les équations usuelles de l'hydrodynamique sans terme de pression, soit

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nu) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m} E \quad (11)$$

où E vérifie l'équation de POISSON

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} (n - n_1) \quad (12)$$

Ce modèle est donc très intéressant car il permet d'utiliser les méthodes classiques de la mécanique des fluides. De plus, en réintroduisant des champs magnétiques et des géométries plus complexes, il donne accès à l'étude de situations fort variées /23/. Mais son principal défaut est qu'il est un cas limite où le mouvement thermique est totalement absent.

4.2. Le modèle hydrodynamique.

Pour tenir compte des effets thermiques, comme dans le cas

d'un fluide usuel de l'hydrodynamique, nous ajoutons un terme de pression à l'équation (11) qui devient

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{e}{m} E - \frac{1}{mn} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (13)$$

Ceci semble légitime, car les équations (10)-(13) peuvent être obtenues en multipliant l'équation de VLASOV (2a) par des puissances successives de v et en intégrant sur les vitesses. Les diverses quantités n , u , P sont alors définies à partir des moments de la fonction de distribution d'ordre 0, 1 et 2, soit

$$\begin{aligned} n &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv \\ u &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} v f(x, v, t) dv \\ P &= \int_{-\infty}^{\infty} m (v - u)^2 f(x, v, t) dv \end{aligned}$$

Malheureusement, le système (10)-(12)-(13) n'est pas fermé, car l'équation qui détermine la pression dépend à son tour du moment d'ordre 3; il y a donc plus d'inconnues que d'équations. Le point délicat est alors de trouver une équation de fermeture, c'est-à-dire une équation reliant la pression à la densité. En mécanique des fluides, on suppose que les échanges de chaleur sont nuls au cours d'oscillations à haute fréquence, et que l'équation d'adiabaticité peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} (P n^{-\gamma}) = 0 \quad (14)$$

Or, cette équation s'obtient en supposant que les collisions binaires sont suffisamment fréquentes pour créer localement une

distribution de vitesse maxwellienne. Dans le cas général tridimensionnel pour un gaz ne possédant pas de degré de liberté interne, γ a pour valeur 5/3. Dans le cas d'un mouvement à une dimension, on a $\gamma = 3$.

Cette description ne se justifie, comme nous l'avons dit, que pour une fréquence de collisions ν telle que $\nu \gg \omega_p$, et ne semble donc pas s'appliquer au type de plasma non collisionnel envisagé. On peut toutefois observer que si l'on prend $\gamma = 3$, dans les équations hydrodynamiques, on retrouve la relation de BOHM - GROSS (5). Néanmoins, il est difficile de dire, a priori, si ce résultat reste valable dans une théorie non linéaire. Nous verrons, en fait, que pour le modèle "water bag", une description hydrodynamique est possible, à condition toutefois, de modifier l'équation (14).

4.3. Le modèle du "water bag".

Les hypothèses délicates du modèle hydrodynamique montrent qu'il est impératif de revenir à l'espace des phases. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1, pour des problèmes unidimensionnels, l'équation de VLASOV exprime l'évolution d'un "fluide" incompressible de densité f dans l'espace des phases à deux dimensions x, v . Cet espace possède alors trois propriétés importantes :

a) Deux trajectoires dans cet espace ne peuvent pas se couper à un même instant (sinon elles seraient confondues).

b) Si à l'instant $t = 0$ nous considérons une courbe fermée C_0 de l'espace des phases, à l'instant $t > 0$ cette courbe se sera transformée en une courbe C_1 également fermée. De plus tous les points qui étaient à l'intérieur de C_0 à $t = 0$, seront à l'intérieur de C_1 à l'instant t . (Voir la figure 1).

c) Si nous considérons la trajectoire d'un point dans l'espace des phases, la densité de phase $f = f_1$ reste constante le long de cette trajectoire.

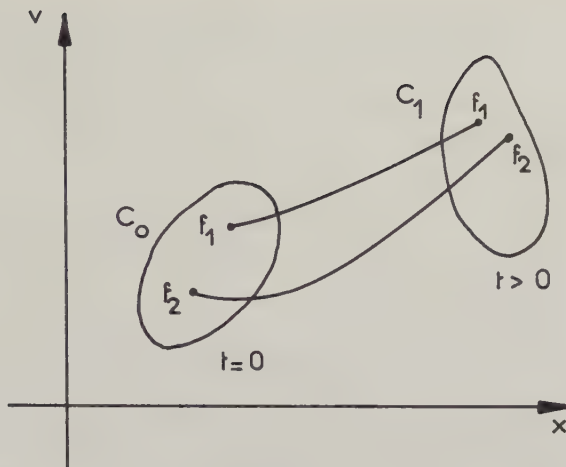


Figure 1

Ainsi le mouvement d'un point dans l'espace des phases est décrit par les équations caractéristiques de l'équation de VLASOV

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{e}{m} E \qquad (15)$$

Si nous considérons une situation initiale où la fonction de distribution f est constante dans un domaine limité par un contour fermé donné, et nulle ailleurs, nous pouvons conclure que

- f reste constante
- seul le contour se déforme, conformément aux équations (15).

Le problème est donc celui de l'évolution d'un "fluide" homogène et incompressible, de densité constante f , dans l'espace des phases, d'où le nom pittoresque de "water bag" donné par DE PACKH /24/ qui, le premier, introduisit ce modèle.

D'après les propriétés énoncées précédemment, un point sur le contour reste sur le contour, et pour suivre l'évolution du système, il suffit de suivre l'évolution des points du contour selon les équations

(15). Nous pouvons généraliser tout naturellement au cas de plusieurs "fluides" de différentes densités. Il suffira, pour en connaître l'évolution, de déterminer le mouvement des courbes frontières entre les régions de différentes densités, conformément à (15).

Il s'agit donc d'un sous-ensemble du modèle de VLASOV, et il est incontestablement plus simple à traiter. Nous allons étudier ce modèle dans la suite de ce travail.

CHAPITRE II

PROPRIETES GENERALES DU MODELE

"WATER BAG"

Ce modèle a donné lieu à de nombreux travaux analytiques et numériques. Au cours de ce chapitre, nous nous proposons de faire une synthèse de ces travaux afin de dégager certaines propriétés du modèle "water bag". Nous allons successivement envisager:

- l'établissement des équations de base
- la connexion avec le modèle hydrodynamique
- les propriétés énergétiques
- la filamentation et le comportement asymptotique des distributions dans l'espace des phases
- la mécanique statistique des "fluides" non collisionnels de l'espace des phases.

1. EQUATIONS DE BASE.

Nous considérons, à un instant donné, dans l'espace des

phases, un certain nombre de contours fermés C_j ne se coupant pas. Entre les deux courbes C_{j-1} et C_j la fonction de distribution prend une valeur constante F_j (figure 2). La fonction de distribution des vitesses (figure 3) en un point x_0 donné, a ainsi l'allure d'une fonction en escalier.

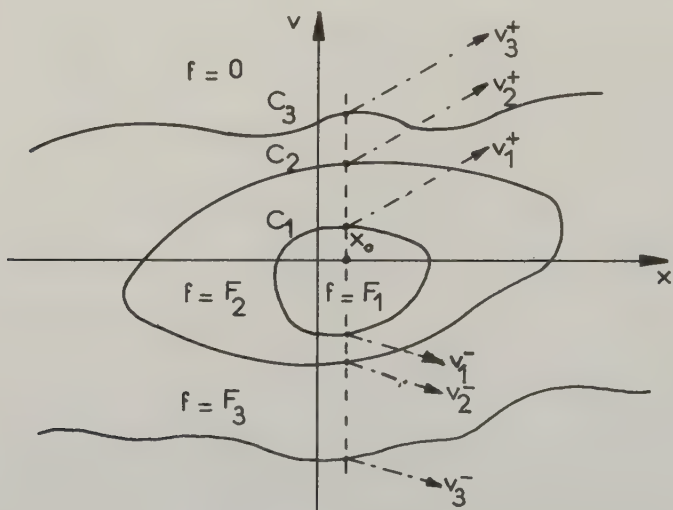


Figure 2

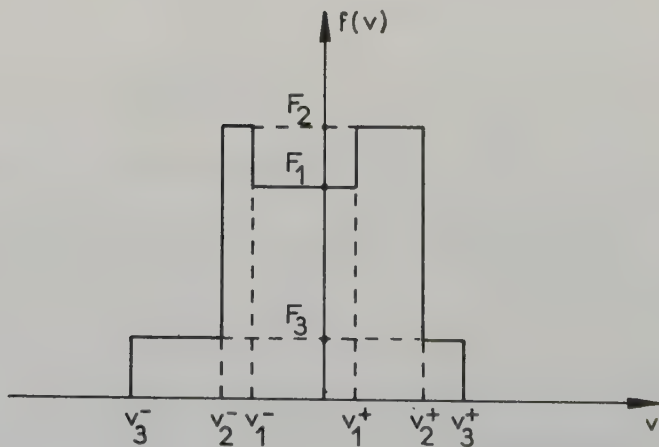


Figure 3 : fonction de distribution des vitesses correspondant au diagramme précédent, au point x_0

On voit donc qu'avec un nombre suffisamment élevé de contours, on peut approximer raisonnablement tout type de fonction de distribution.

On appelle A_j la discontinuité de la fonction de distribution sur la frontière C_j , c'est-à-dire

$$A_j = F_j - F_{j+1} \quad (16)$$

Lorsque les contours n'ont pas une forme compliquée, on peut les représenter chacun par deux fonctions univoques de x , $v_j^+(x,t)$ et $v_j^-(x,t)$, l'indice + se rapportant à la partie supérieure de C_j et l'indice - à la partie inférieure. Les équations (15) qui décrivent le système s'écrivent alors

$$\frac{d}{dt} v_j^\pm = \frac{e}{m} E$$

où E satisfait à l'équation de POISSON

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \sum_j \int_{v_j^-}^{v_j^+} A_j dv - \frac{en_1}{\epsilon_0}$$

On obtient alors le système

$$\frac{\partial v_j^+}{\partial t} + v_j^+ \frac{\partial v_j^+}{\partial x} = \frac{e}{m} E \quad (17a)$$

$$\frac{\partial v_j^-}{\partial t} + v_j^- \frac{\partial v_j^-}{\partial x} = \frac{e}{m} E \quad (17b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \sum_j A_j (v_j^+ - v_j^-) - \frac{en_1}{\epsilon_0} \quad (17c)$$

Ces équations restent utilisables tant que les fonctions $v_j^+(x)$

et $\bar{v}_j(x)$ restent univoques. Sinon, nous sommes obligés de recourir aux méthodes purement numériques. Ainsi, la méthode de BERK et ROBERTS /25/ consiste à suivre sur le contour C_j le mouvement d'un certain nombre de points de coordonnées x_i et v_i , à partir des équations (15) conformément au schéma du second ordre

$$x_i\{(n+1)\Delta t\} = x_i\{(n-1)\Delta t\} + 2v_i(n\Delta t) \Delta t$$

$$v_i\{(n+1)\Delta t\} = v_i\{(n-1)\Delta t\} + 2E_i(n\Delta t) \Delta t$$

2. CONNEXION AVEC LE MODELE HYDRODYNAMIQUE.

Considérons un seul contour dans l'espace des phases, et supposons le plasma infini (figure 4).

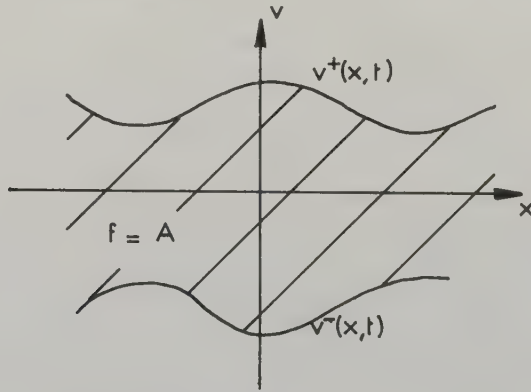


Figure 4

La fonction de distribution prend une valeur constante A , à l'intérieur d'une bande horizontale délimitée par deux frontières v^+ et v^- . Nous supposons que ces fonctions ont une valeur unique pour x donné. Le système (17) s'écrit

$$\frac{\partial v^{\pm}}{\partial t} + v^{\pm} \frac{\partial v^{\pm}}{\partial x} = -\frac{e}{m} E \quad (18)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} A(v^{+} - v^{-}) - \frac{en_1}{\epsilon_0}$$

Nous pouvons définir alors la vitesse moyenne u et la densité électronique n par

$$u(x,t) = \frac{1}{n} \int_{v^{-}}^{v^{+}} v f dv = \frac{1}{2} (v^{+} + v^{-}) \quad (19)$$

$$n(x,t) = \int_{v^{-}}^{v^{+}} f dv = A(v^{+} - v^{-})$$

Nous considérons les relations (19) comme un changement de variables appliqué au système (18) qui devient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nu) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m} E - \frac{1}{mn} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (20)$$

$$P n^{-3} = \frac{m}{12A^2} = C t e$$

Les équations (20) sont formellement identiques aux équations usuelles de l'hydrodynamique d'un gaz évoluant de manière adiabatique avec $\gamma=3$. Ce résultat a été signalé pour la première fois en /26/. Il est nécessaire toutefois, de souligner le caractère formel de l'analogie. En effet, l'équation de fermeture du "water bag" implique

que Pn^{-3} est une constante absolue au sens eulérien (en tout point de l'espace et à tout moment), alors que l'équation de fermeture de l'hydrodynamique (14) est une constante à condition de suivre le mouvement du fluide (au sens lagrangien). Cette équation (14) peut s'écrire en effet

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(Pn^{-3} \right) = 0$$

Dans l'étude des oscillations linéaires autour d'un équilibre homogène, on a $u = u_0(x) + u_1(x,t)$ avec $u_0 \equiv 0$, et le terme $u \frac{\partial}{\partial x}$ disparaît dans l'approximation linéaire. Les deux descriptions sont alors équivalentes. Il n'en sera pas de même dans l'étude des phénomènes non linéaires, et cela même pour les grandes longueurs d'onde.

C'est l'intérêt du "water bag" à 1 contour d'être un modèle strictement non collisionnel mais présentant les simplifications du modèle hydrodynamique. Nous mettrons à profit ce dernier point dans les chapitres 4 et 5, à propos de l'étude des phénomènes non linéaires de grandes longueurs d'onde, et de l'étude de la propagation des oscillations électroniques en milieu inhomogène.

Enfin, une restriction doit être mentionnée concernant la possibilité pour les courbes v^+ et v^- de prendre plusieurs valeurs, pour une valeur de x donnée (voir figure 5). Dans ces conditions, la relation $n = A(v^+ - v^-)$ cesse d'être valable, et l'analogie hydrodynamique est perdue. L'apparition d'une fonction multiple $v^\pm(x)$ correspond au cas limite d'une dérivée infinie pour la densité, c'est-à-dire à l'apparition d'une discontinuité dans la densité et la pression. L'équivalence cesse donc dès la formation d'une onde de choc.

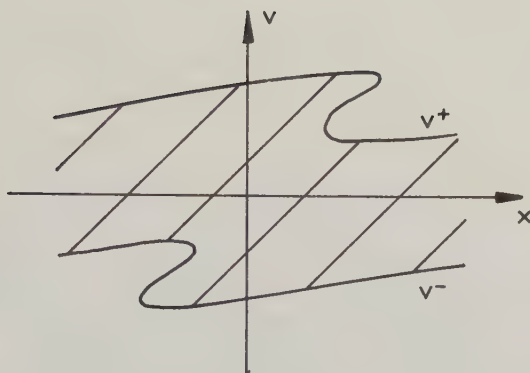


Figure 5

3. PROPRIETES ENERGETIQUES DU "WATER BAG".

Considérons une distribution d'électrons représentée par une série de M contours dans l'espace des phases, et maintenue par une charge ionique fixe et finie. La charge ionique peut même éventuellement être constituée par une grille plane chargée positivement et perméable aux électrons. Dans les deux cas, nous supposons que la distribution en vitesse des électrons est symétrique, c'est-à-dire $v_j^+ = -v_j^- = v_j$. La figure (6) représente le cas d'une grille chargée positivement maintenant prisonnière une population électronique représentée par un "water bag" à trois contours.

Soient x_j et $-x_j$ les points extrêmes du contour j . Ainsi la fonction $v_j(x)$ est telle que $v_j = 0$ si $x > x_j$ ou $x < -x_j$.

Nous nous proposons alors de calculer l'énergie totale W du plasma, connaissant les valeurs A_j de la fonction de distribution (16), les points extrêmes $\pm x_j$ et le nombre total N de particules. Puis en extré-
misant cette énergie, nous allons rechercher à quelles équations obéissent les contours v_j pour un plasma d'énergie extrémum (en fait un minimum).

Ce calcul avait déjà été fait dans le cas d'un "water bag" à un seul contour /27/. HOHL /28/ l'a généralisé pour plusieurs contours. Nous reproduisons ici les principales étapes de ce calcul.

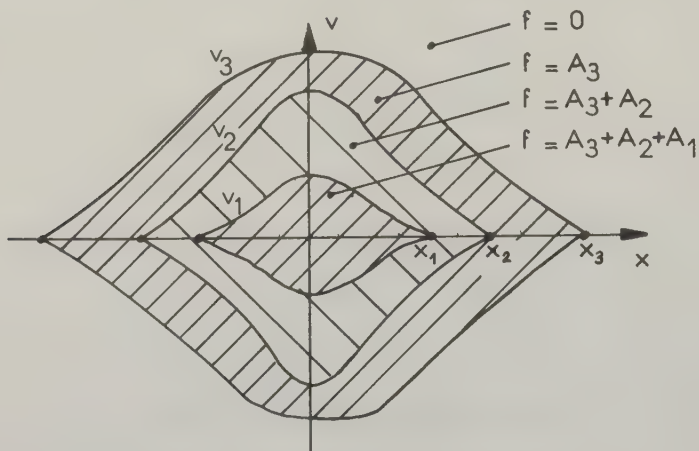


Figure 6

3.1. Calcul de l'énergie dans le plasma.

L'énergie W dans le plasma est la somme de deux termes :
 énergie potentielle W_p et énergie cinétique W_c .

Le calcul de l'énergie potentielle nécessite de connaître le champ électrique E . Pour cela nous partons de l'équation de POISSON (17c), qui dans le cas d'une distribution symétrique par rapport aux vitesses, s'écrit

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M 2A_j v_j - \frac{en_i}{\epsilon_0}$$

En intégrant, il vient

$$E = \frac{2e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j \theta_j(x) - E_i(x)$$

où l'on a posé

$$\theta_j(x) = \int_{-x_j}^x v_j(x) dx$$

et où E_i représente le champ électrique d'origine ionique. L'énergie potentielle par unité de longueur s'écrit

$$\frac{dW_p}{dx} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{2e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j \theta_j - E_i \right)^2$$

D'autre part l'énergie cinétique W_c par unité de longueur est

$$\frac{dW_c}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{mv^2}{2} f(v) dv = \sum_{j=1}^M \frac{mA_j v_j^3}{3}$$

L'expression de l'énergie totale s'obtient alors en intégrant $dW_p/dx + dW_c/dx$ entre les limites extrêmes du plasma $-x_M$ et $+x_M$, soit

$$W = \int_{-x_M}^{x_M} \left(\sum_{j=1}^M \frac{mA_j v_j^3}{3} + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{2e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j \theta_j - E_i \right)^2 \right) dx \quad (21)$$

3.2. Extrémisation de l'énergie.

Nous nous proposons de rechercher, parmi tous les contours v_j , la distribution qui rend W extremum, ce qui revient à extrémiser la quantité (21), que nous pouvons réécrire sous la forme

$$W = \int_{-x_M}^{x_M} g(x, v_1, \dots, v_j, \dots, v_M, \theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_M) dx \quad (22)$$

avec

$$g = \sum_{j=1}^M \frac{mA_j v_j^3}{3} + \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{2e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j \theta_j - E_1 \right)^2 \quad (23)$$

Nous introduisons en plus la contrainte sur le nombre total N d'électrons

$$N = \int_{-x_M}^{x_M} \sum_{j=1}^M 2A_j v_j dx = C^{te}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\int_{-x_M}^{x_M} h(v_1, \dots, v_j, \dots, v_M) dx = C^{te} \quad (24)$$

avec
$$h = \sum_{j=1}^M 2A_j v_j$$

Extrémiser une intégrale du type (22) avec une contrainte du type (24), est un problème de calcul des variations [29]. Les contours v_j doivent alors satisfaire à l'équation d'EULER

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g^*}{\partial v_j} \right) - \frac{\partial g^*}{\partial \theta_j} = 0$$

avec $g^* = g - \lambda h$. λ est un multiplicateur de LAGRANGE, qui en définitive ne jouera aucun rôle; en effet, les points limites $-x_j$ et x_j de chaque contour j sont fixés, et la contrainte sur le nombre de particules est redondante.

Si nous n'avions pas fixé les points $-x_j$ et x_j , il aurait fallu introduire des équations supplémentaires, mais elles n'auraient rien changé au résultat final.

L'équation d'EULER nous donne alors

$$mA_j \frac{d}{dx} (v_j^2) - 2eA_j \left(\frac{2e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j \theta_j - E_1 \right) = 0$$

soit

$$v_j \frac{dv_j}{dx} - \frac{e}{m} E = 0 \quad (25)$$

Cette équation est justement l'équation (17) où la dérivée par rapport au temps ne figure plus : c'est l'équation des contours stationnaires ou équation d'équilibre.

3.3. Principe d'énergie minimum.

Nous nous proposons de montrer à quelle condition cet extremum est effectivement un minimum. Le calcul des variations nous indique alors que la variation au second ordre de l'énergie $\delta^2 W$, doit être positive pour qu'il en soit ainsi.

Nous donnons alors une variation aux contours et au champ électrique à l'équilibre, en écrivant

$$E = E_0 + \delta E$$

$$v_j^\pm = \pm v_j + \delta v_j^\pm$$

et nous calculons la variation d'énergie cinétique et potentielle qui en résulte. En conservant les termes du premier et du deuxième ordre en $\delta v_j^\pm$ et δE , nous obtenons

$$\begin{aligned} \delta W_c &= \frac{m}{2} \sum_{j=1}^M \int_{-x_j}^{x_j} A_j v_j^2 (\delta v_j^+ - \delta v_j^-) dx \\ &+ \frac{m}{2} \sum_{j=1}^M \int_{-x_j}^{x_j} A_j v_j \{ (\delta v_j^+)^2 + (\delta v_j^-)^2 \} dx + O\{(\delta v_j^\pm)^3\} \end{aligned}$$

$$\delta W_p = \epsilon_0 \int_{-x_M}^{x_M} E_0 \delta E \, dx + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-x_M}^{x_M} (\delta E)^2 \, dx + O\{(\delta E)^3\}$$

En intégrant par parties, nous réécrivons la variation d'énergie potentielle sous la forme

$$\delta W_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-x_M}^{x_M} (\delta E)^2 \, dx + \epsilon_0 \int_{-x_M}^{x_M} \Phi_0 \frac{\partial}{\partial x} (\delta E) \, dx$$

ou encore, en utilisant l'équation de POISSON

$$\delta W_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-x_M}^{x_M} (\delta E)^2 \, dx + e \int_{-x_M}^{x_M} \Phi_0 \sum_{j=1}^M A_j (\delta v_j^+ - \delta v_j^-) \, dx$$

Φ_0 représente le potentiel à l'équilibre, défini par $E_0 = -\partial \Phi_0 / \partial x$.

En combinant δW_c et δW_p , nous obtenons la variation de l'énergie totale

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{j=1}^M \int_{-x_j}^{x_j} A_j (\delta v_j^+ - \delta v_j^-) \left(\frac{mv_j^2}{2} + e\Phi_0 \right) dx \\ &+ \frac{m}{2} \sum_{j=1}^M \int_{-x_j}^{x_j} A_j v_j \{ (\delta v_j^+)^2 + (\delta v_j^-)^2 \} dx \\ &+ \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-x_M}^{x_M} (\delta E)^2 \, dx \end{aligned}$$

Dans cette expression, nous reconnaissons la quantité

$$U_j = \frac{mv_j^2}{2} + e\Phi_0$$

qui est l'énergie totale d'un électron sur le contour à l'équilibre j , et qui est une constante, puisque cette quantité est obtenue en intégrant directement l'équation (25) des contours à l'équilibre. Le premier terme dans l'expression de δW s'écrit alors

$$\sum_{j=1}^M U_j \int_{-x_j}^{x_j} A_j (\delta v_j^+ - \delta v_j^-) dx = 0$$

à cause de la conservation du nombre de particules. Les termes du premier ordre s'éliminant, il ne reste que les termes du second ordre, et nous obtenons ainsi l'expression de la variation d'énergie au second ordre

$$\delta^2 W = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^M \int_{-x_j}^{x_j} A_j v_j \{(\delta v_j^+)^2 + (\delta v_j^-)^2\} dx + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{-x_M}^{x_M} (\delta E)^2 dx$$

Nous voyons alors que si tous les coefficients A_j sont positifs, l'expression $\delta^2 W$ est toujours positive, et l'extremum d'énergie est en fait un minimum.

De ceci nous pouvons déduire deux propriétés importantes du modèle "water bag" :

a) L'équation de VLASOV impliquant la conservation de l'énergie, tout équilibre avec A_j positif est stable car il correspond à un état d'énergie minimum. Par passage au cas continu (infinité de contours), nous avons une généralisation du critère de PENROSE /6/: tout équilibre inhomogène décrit par une fonction $f_0(x,v)$ symétrique en vitesse, est stable si cette fonction n'a pas de minimum local. En revanche, si un coefficient A_j est négatif, aucune conclusion ne peut être tirée.

b) Si nous partons d'un état différent de l'état stationnaire, ce dernier ne peut être atteint, à cause du principe de conservation de l'énergie. Dans le plan de l'espace des phases, les contours ne se stabiliseront donc jamais, mais ils oscilleront constamment avec une amplitude finie, et une microstructure de plus en plus fine. C'est le phénomène maintenant bien connu de filamentation dans l'espace des phases.

4. FILAMENTATION ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES DISTRIBUTIONS DANS L'ESPACE DES PHASES.

Comme nous venons de le démontrer, les contours du "water bag" oscillent constamment dans l'espace des phases. Toutefois, si nous pouvons conclure que la distribution fine ne tend vers aucune limite, il est possible et même probable, qu'une distribution $\langle f(x,v,t) \rangle$ moyennée sur des volumes petits, mais finis de l'espace des phases, tende vers un certain équilibre.

Ce problème a d'abord été étudié pour un "gaz" d'étoiles. Il est bien connu en dynamique stellaire que les effets collectifs sont décrits par l'équation de VLASOV, comme pour les plasmas. LECAR et COHEN /30/ ont simulé numériquement un "gaz" d'étoiles unidimensionnel. Ils ont étudié en particulier $\langle f(x,v,t) \rangle$ et ont montré que, pour des temps de plus en plus grands, cette quantité dégénère vers une fonction de l'énergie seule.

De plus, une théorie proposée par LYNDEN-BELL /31/, suggère, pour cette fonction, une expression que nous démontrerons dans le prochain paragraphe. Pour vérifier cette théorie, les expériences numériques de LECAR et COHEN ont été reprises par HOHL et CAMPBELL /32/. Ces derniers ont montré que, suivant la distribution initiale, 80% à 96% des étoiles suivent une statistique de FERMI-DIRAC, conformément aux calculs de LYNDEN-BELL. Nous pouvons également citer les expériences numériques de CUPERMANN /33/ et JANIN /34/ dont les résultats sont en accord, au moins qualitatif, avec cette théorie.

HOHL /28/ a refait ces expériences numériques en physique des plasmas pour un système de 4000 "électrons" maintenus par une charge ionique infiniment mince, constituée par une grille chargée positivement et perméable aux électrons. La distribution initiale stationnaire, du type "water bag" à deux contours, avec $A_2 = -A_1 = A$, est représentée sur le premier schéma de la figure 7.

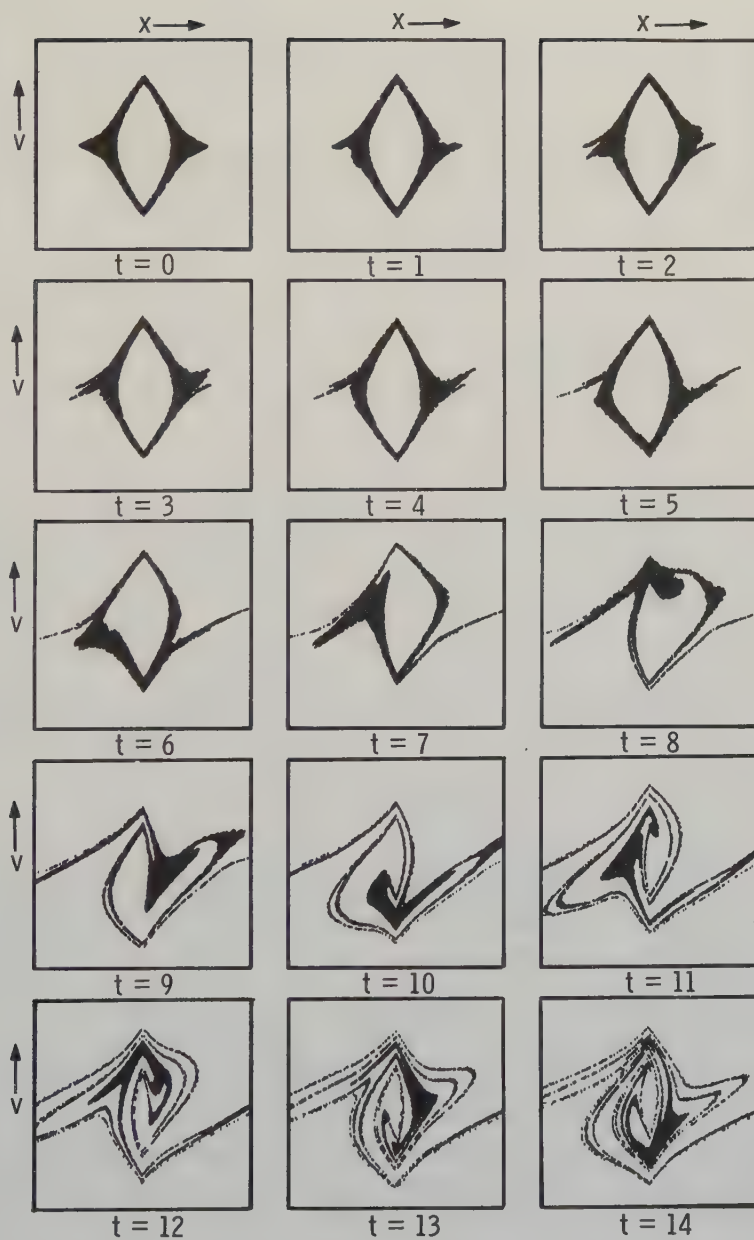


figure 7

Cet état est instable, et l'instabilité apparaît autour de $t = 7 \omega_p^{-1}$. S'il est vrai que $\langle f \rangle$ tende vers une distribution de FERMI-DIRAC la courbe $\text{Log} \left(\langle f \rangle / (A - \langle f \rangle) \right)$ en fonction de l'énergie U d'une particule, doit être une droite. Nous constatons sur la figure 8 que 78% environ des électrons suivent la statistique de FERMI-DIRAC.

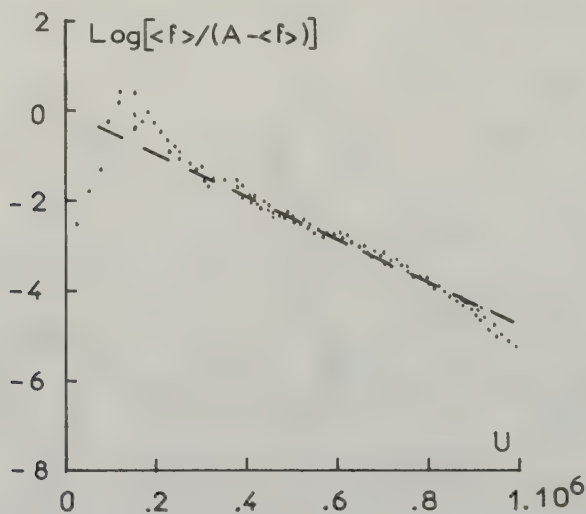


Figure 8

Nous devons également signaler des expériences numériques sur l'instabilité double faisceau. Considérons, par exemple, le système décrit initialement par une fonction de distribution homogène et infinie, à deux bosses symétriques par rapport à l'origine des vitesses. Nous pouvons la représenter par le "water bag" à deux contours de la figure 9. Il s'agit, en fait, de deux faisceaux d'électrons de vitesse moyenne opposée, qui s'interpénètrent. L'application du critère de PENROSE /6/ montre que ce système est instable; son étude sort donc rapidement du cadre de la théorie linéaire de LANDAU /4/.

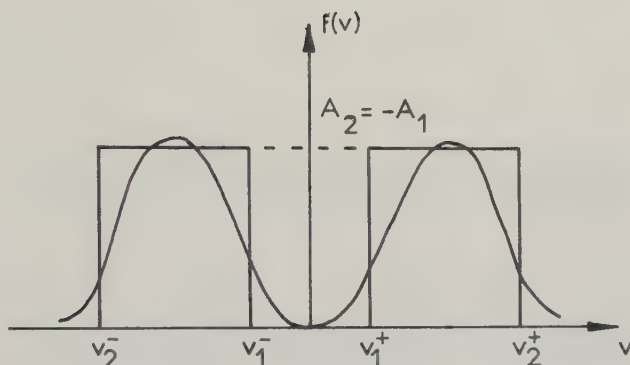


Figure 9

Par simulation numérique de ce "water bag" à deux contours, BERK et ROBERTS /35/, ont montré que l'évolution d'une telle instabilité conduisait à l'apparition d'une onde électrostatique stationnaire, fortement non linéaire, sur laquelle se superposent des oscillations cohérentes et des fluctuations. Il est important de noter que ces structures sont en forme de tourbillons et correspondent à des trous dans l'espace des phases (figure 10).

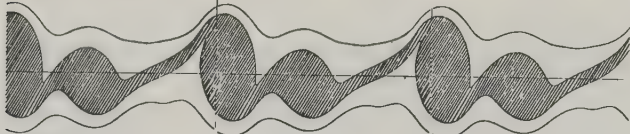
Nous pouvons remarquer que si la structure microscopique évolue continuellement dans le temps, le comportement macroscopique n'est plus tellement modifié après des temps de l'ordre de $20 \omega_p^{-1}$ ("step" 400). Ceci suggère encore que la distribution tend vers une fonction de l'énergie seule.

Ces "expériences" numériques ont été reprises récemment par FINZI /83/ qui a montré clairement que l'évolution finale d'une telle instabilité est une onde stationnaire du type BERNSTEIN-GREENE-KRUSKAL /36/. Ce phénomène a même été mis en évidence à l'aide d'expériences sur des accélérateurs de particules /37/ /38/.

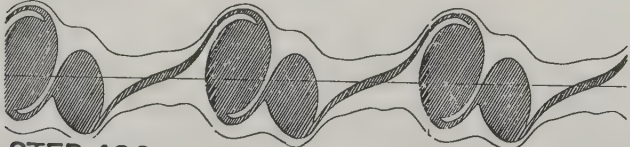
STEP 200



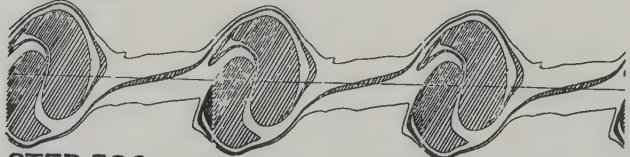
STEP 250



STEP 300



STEP 400



STEP 500



STEP 600

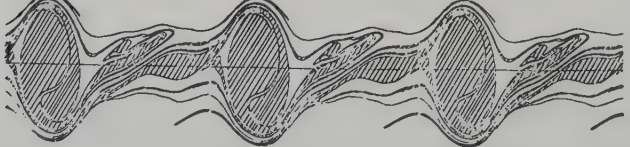


Figure 10 : Chaque "step" correspond à un temps
de $0,05 \omega_p^{-1}$.

5. MECANIQUE STATISTIQUE DES "FLUIDES" DE L'ESPACE DES PHASES.

Conformément au modèle "water bag", nous supposons que la fonction de distribution ne peut prendre que deux valeurs A ou 0, dans certaines régions de l'espace des phases (nous considérons pour simplifier un "water bag" à un seul contour, bien que la démonstration puisse être généralisée au cas de M contours). Considérons dans cet espace un quadrillage très fin, de telle sorte que les filaments qui constituent les contours du "water bag" aient des dimensions encore très grandes devant celles de ces microcellules (figure 11).

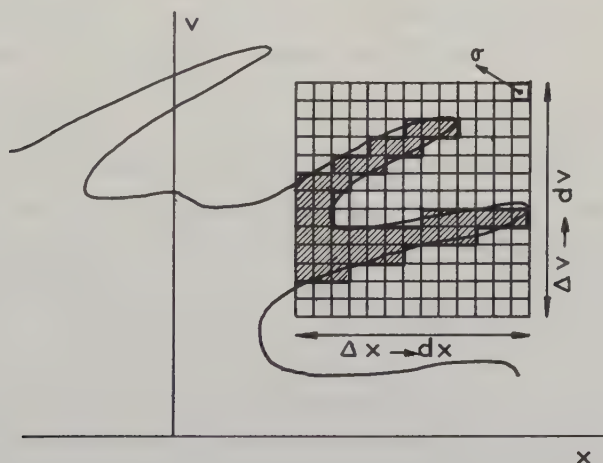


Figure 11

Soit σ la surface de chacune de ces microcellules. Le nombre de particules que nous pouvons mettre dans chacune d'elles ne peut pas être différent de $A\sigma$ ou 0, à cause de l'équation de VLASOV. Dans ce processus, on néglige les cellules qui ne sont que partiellement remplies. Par exemple, sur la figure 11, on a remplacé le tracé des filaments par un tracé en zig-zag, qui ne modifie pas le caractère "water bag" du système, à cause de la petitesse de ces microcellules.

Nous nous proposons alors, en supposant que la répartition des éléments de phase dans chaque microcellule se fasse au hasard, de rechercher la distribution la plus probable qui en résulte /31/. Pour cela, nous groupons les microcellules en macrocellules. La macrocellule i représente un état d'énergie U_i . (Il faut noter que chaque macrocellule représente en fait un élément $dx dv$ de l'espace des phases, avec dx et dv tendant vers zéro).

Dans la macrocellule repérée par l'indice i , soient g_i le nombre total de microcellules, et n_i le nombre de ces microcellules occupées. Nous allons alors rechercher le nombre G_i de possibilités de choisir les n_i microcellules occupées parmi les g_i microcellules de la macrocellule i . Pour cela, nous utilisons deux principes

a) discernabilité (comme dans la statistique de MAXWELL - BOLTZMANN)

b) exclusion : une microcellule peut être soit occupée, soit vide (on néglige les cellules qui ne sont que partiellement remplies).

Ces deux principes correspondent à une quatrième statistique (IV) comme nous pouvons le voir sur le tableau suivant

	Particules discernables	Particules indiscernables
Pas d'exclusion	MAXWELL-BOLTZMANN	BOSE-EINSTEIN
Exclusion	IV	FERMI-DIRAC

Par conséquent, le nombre de possibilités G_i de mettre n_i éléments dans g_i cases est le nombre d'arrangements $A_{g_i}^{n_i}$ soit

$$G_i = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!} \quad (26)$$

Le nombre total de distributions possibles G pour tous les états sera donné en fonction des G_i par

$$G = N! \prod_i \frac{G_i}{n_i!} \quad (27)$$

où $N = \sum n_i$ est le nombre total de microcellules occupées. En combinant (26) et (27) nous obtenons l'expression

$$G = N! \prod_i \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

qui au facteur $N!$ près est la formule de FERMI-DIRAC.

Comme dans les autres statistiques, nous recherchons la distribution la plus probable, compte-tenu des contraintes sur le nombre total de particules et sur l'énergie totale qui doivent rester constants. En introduisant les multiplicateurs de LAGRANGE α et β , nous obtenons, comme pour FERMI-DIRAC

$$\text{Log} \frac{g_i - n_i}{n_i} = \alpha + \beta U_i$$

Il y a cependant une différence avec la statistique de FERMI-DIRAC. Contrairement au cas quantique, σ peut tendre vers zéro ; mais alors g_i tend vers l'infini, et l'on s'attendrait à retomber sur la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN.

En fait, ce qui nous intéresse, c'est la fonction de distribution moyennée sur une surface petite mais finie de l'espace des phases, soit $\langle f(U) \rangle$. Pour l'état i , nous pouvons écrire

$$\langle f(U_i) \rangle = \frac{A\sigma}{g_i\sigma} n_i = A \frac{n_i}{g_i}$$

où $A\sigma$ représente le nombre de particules dans une microcellule, $g_i\sigma$ représente la surface totale dans l'espace des phases des microcellules d'énergie U_i , et n_i représente le nombre de microcellules occupées dans l'état i .

Nous voyons donc, que ce qui importe n'est pas n_i , mais le rapport n_i/g_i . Nous obtenons alors

$$\text{Log} \frac{A - \langle f \rangle}{\langle f \rangle} = \alpha + \beta U_i$$

$$\text{soit} \quad \langle f(U_i) \rangle = \frac{A}{1 + \exp(\alpha + \beta U_i)} \quad (28)$$

qui est bien une distribution de FERMI-DIRAC.

Dans ce calcul, le quantum d'occupation $A\sigma$ tend vers zéro, mais en même temps le nombre n_i de microcellules à remplir tend vers l'infini, d'où l'apparition de cette statistique de type FERMI-DIRAC.

Signalons que ce calcul peut être généralisé au cas où la fonction de distribution peut prendre M valeurs $F_1, F_2, \dots, F_M$ dans certaines régions de l'espace des phases (cas du "water bag" avec M contours). Dans ce cas, l'expression (28) est plus compliquée, et n'est plus du type FERMI-DIRAC /31/.

Bien entendu, - et là réside la principale difficulté - il faut disposer d'un argument justifiant que la répartition des éléments de l'espace des phases dans les différentes microcellules se fait au hasard. LYNDEN-BELL /31/ admet que cela doit avoir lieu lorsqu'une relaxation violente prend place dans le système, donnant lieu de plus à un "mélange" énergétique des éléments de l'espace des phases. Dans ces conditions, la conservation de l'énergie et le fait que f ne peut prendre que

les valeurs A ou zéro, entraînent comme distribution la plus probable celle de FERMI-DIRAC.

Dans la réalité, les phénomènes à grandes longueurs d'onde font subsister une certaine cohérence dans la répartition des éléments de l'espace des phases, et il faut être très prudent sur l'application de cette statistique (en particulier en ce qui concerne l'instabilité double-faisceau).

En fait, comme le montrent les expériences numériques décrites au paragraphe 4, le point important est que la distribution asymptotique pour des systèmes instables n'est fonction que de l'énergie. S'il est difficile de préjuger du comportement ultime de ces solutions stationnaires, nous pouvons cependant dire qu'elles sont de longue durée, même si elles ne sont pas totalement stables.

Ceci nous suggère alors un autre point de vue : nous pouvons essayer de déterminer directement, à partir de l'équation de VLASOV, ces solutions inhomogènes, et rechercher leur stabilité. Si ces solutions sont nettement instables, elles ne peuvent être l'aboutissement d'un processus dynamique. Sinon, elles sont intéressantes. C'est ce problème que nous avons déjà signalé au paragraphe 2.2 du premier chapitre. Nous verrons au chapitre 5 la manière de l'aborder.

6. CONCLUSION.

De ce chapitre, consacré à une présentation générale du modèle "water bag", il est intéressant de faire ressortir trois points importants.

a) Le fait de représenter une fonction de distribution par une fonction en escalier , correspond très bien à l'expérience. Toute mesure de $f(x,v,t)$ se présente en fait comme un tableau de nombres auxquels il est possible de faire correspondre les "marches" A_j du "water bag".

b) Ce modèle correspond à un traitement analytique simple. La propriété de conservation de l'espace des phases y est très bien sauvegardée. Nous pouvons d'ailleurs signaler que ce modèle se prête aisément à des calculs dans des géométries plus compliquées que la géométrie unidimensionnelle plane. Par exemple, J.P. DOREMUS /39/ /40/, en dynamique stellaire, traite le cas d'oscillations radiales en géométrie sphérique. L'espace des phases apparaît alors comme un espace tridimensionnel r, R, T (r : coordonnée radiale de position, R et T : vitesses radiale et tangentielle).

c) Du point de vue de la simulation numérique, enfin, le "water bag" est le modèle le plus intéressant pour tester des théories assez subtiles, comme celle de LYNDEN-BELL. A condition que le calcul soit mené à une échelle assez fine, la courbe frontière a assez de points pour être définie avec précision (cf. les expériences numériques de JANIN /34/). En revanche, l'utilisation d'un modèle lagrangien, ne permettrait pas de conserver longtemps le caractère collectif du problème, la courbe frontière ne pouvant plus être définie avec assez de précision.

CHAPITRE III

ANALYSE LINEAIRE DU MODELE "WATER BAG"

Dans ce chapitre, nous allons reprendre dans l'optique du modèle "water bag" le problème de la théorie linéarisée d'un plasma homogène, envisagé pour la première fois par LANDAU /4/. Nous supposons un plasma à l'équilibre, homogène et infini, sans vitesse moyenne. Les ions sont également homogènes, et l'ensemble est globalement neutre, ce qui se traduit par la relation $n_i = n_o$. Les M contours du "water bag" dans l'espace des phases sont alors des droites parallèles, définies par

$$v_j^+ = -v_j^- = a_j \quad (29)$$

Nous savons que la réaction du plasma à une perturbation à un instant donné (oscillations libres) ou en un point donné (oscillations forcées), est entièrement décrite dans l'approximation linéaire par la constante diélectrique

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF_o/dv}{\omega - kv} dv$$

$n_0 F_0(v)$ représente la fonction de distribution à l'équilibre, qui dans le modèle "water bag" est une fonction en escalier, que nous écrivons sous la forme suivante

$$F_0(v) = \sum_{j=1}^M A_j \{ H(v + a_j) - H(v - a_j) \} \quad (30)$$

où $H(z)$ représente la fonction de HEAVISIDE, définie par

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \text{ est positif} \\ 0 & \text{si } z \text{ est négatif} \end{cases}$$

Avec ces notations, les coefficients A_j correspondent aux discontinuités de la fonction $F_0(v)$ et non à celles de la fonction de distribution $n_0 F_0(v)$ ainsi que nous l'avions fait précédemment. La neutralité électrique s'exprime simplement sous la forme

$$\sum_{j=1}^M 2 a_j A_j = 1$$

Les deux premières parties de ce chapitre sont consacrées au problème des oscillations libres : la première partie comporte l'étude de la constante diélectrique du "water bag", et la deuxième partie est réservée à la construction d'une base de fonctions propres du "water bag" pour l'étude générale des oscillations libres.

Dans la troisième partie, nous aborderons le problème des oscillations forcées : ce problème est en effet très intéressant du point de vue expérimental. Nous verrons plus précisément comment le modèle "water bag" permet un calcul aisé de l'impédance d'un dipôle formé de deux grilles parallèles, plongées dans un plasma chaud.

1. LA CONSTANCE DIELECTRIQUE DU "WATER BAG".

Si le plasma est perturbé initialement sur le mode k , il se met à osciller sur des pulsations ω_k qui sont solutions de l'équation de dispersion $\epsilon(k, \omega_k) = 0$. Ces pulsations ω_k sont généralement des nombres complexes.

Dans cette partie, nous nous proposons de rechercher les racines de l'équation de dispersion du modèle "water bag". En utilisant (30) dans la constante diélectrique (3), l'équation de dispersion s'écrit

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k} \sum_{j=1}^M \left(\frac{A_j}{\omega - k a_j} - \frac{A_j}{\omega + k a_j} \right) = 0 \quad (31)$$

où M représente le nombre de contours. Nous allons envisager trois cas particuliers.

1.1. Cas d'un contour unique.

Ce cas, intéressant à considérer, présente, comme nous l'avons vu précédemment, les simplifications du modèle hydrodynamique.

L'équation (31) s'écrit très simplement sous la forme

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 a^2} = 0$$

et les racines de l'équation de dispersion sont données par

$$\omega_k^2 = \omega_p^2 + k^2 a^2 \quad (32)$$

Or, la vitesse moyenne d'agitation thermique v_T peut être calculée par

$$v_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 F_0(v) dv = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a v^2 dv = \frac{a^2}{3}$$

L'équation (32) devient donc

$$\omega_k^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_T^2 = \omega_p^2 (1 + 3k^2 D^2)$$

et nous retrouvons la relation de BOHM-GROSS (5) qui, dans la théorie linéaire de LANDAU, n'est valable que si $kD \ll 1$. Le cas d'un contour unique présente un certain intérêt dans l'étude des phénomènes à grandes longueurs d'onde, et fournit correctement le terme du premier ordre dans le développement en puissances de $k^2 D^2$.

C'est une bonne approximation d'une fonction de distribution à une bosse. Mais ce modèle a pour principal défaut de ne pas comporter le phénomène d'amortissement LANDAU.

1.2. Cas de 2 contours : instabilité double-faisceau.

Nous pouvons approximer une fonction de distribution de type double-faisceaux, comme sur la figure 12, par un modèle "water bag" à deux contours avec $A_1 < 0$.

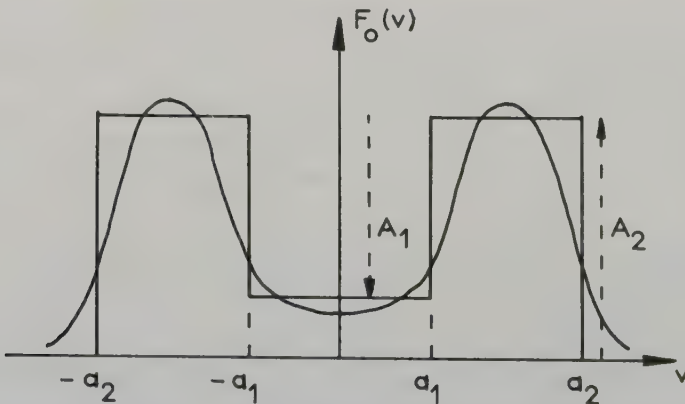


Figure 12

La relation de dispersion s'écrit alors

$$\varepsilon(k, \omega) = 1 - \omega_p^2 \left(\frac{2A_1 a_1}{\omega^2 - k^2 a_1^2} + \frac{2A_2 a_2}{\omega^2 - k^2 a_2^2} \right) = 0$$

soit

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_p^2 + k^2 a_1^2 + k^2 a_2^2) + k^2 a_1^2 a_2^2 (k^2 - B) = 0 \quad (33)$$

avec

$$B = -2\omega_p^2 \left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} \right)$$

Un calcul simple montre que cette équation, considérée comme une équation du deuxième degré en ω^2 , a toujours deux racines ω_1^2 et ω_2^2 réelles. Deux cas sont à considérer :

- a) $B > 0$: si $k < \sqrt{B}$ il y a deux racines de signes contraires, si $k > \sqrt{B}$ les deux racines ω_1^2 et ω_2^2 sont positives.
- b) $B < 0$: les deux racines ω_1^2 et ω_2^2 sont positives.

Par conséquent, seul le cas $B > 0$, $k < \sqrt{B}$ comporte une racine négative. Soit ω_1^2 cette racine, et posons $\omega_1^2 = -\gamma^2$ avec $\gamma^2 > 0$. Le champ électrique qui comprend un terme en $\exp(i\omega_1 t)$ se comporte donc comme $\exp(\pm \gamma t)$. Il y a instabilité, et $\sqrt{B} = k_M$ représente le nombre d'onde maximum permettant le développement d'une instabilité qui, pour exister, nécessite B positif, soit

$$\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} < 0 \quad (34)$$

1.3. Cas de M contours, avec A_j positif.

Ce cas est intéressant à étudier lorsque nous désirons approximer avec assez de précision une fonction $F_0(v)$ à une bosse (par exemple une maxwellienne). La condition A_j positif nous assure, d'après le principe

d'énergie minimum, que le plasma est stable. Le problème important qui se pose alors, est de voir si cette approximation permet de retrouver l'amortissement LANDAU, qui est absent dans le cas d'un modèle à un seul contour.

Nous pouvons réécrire la fonction diélectrique (31) sous la forme

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \omega_p^2 \sum_{j=1}^M \frac{2a_j A_j}{\omega^2 - k^2 a_j^2}$$

Comme tous les nombres A_j sont positifs, l'allure de cette fonction de ω est représentée sur la figure 13 (où nous avons pris $M=4$).

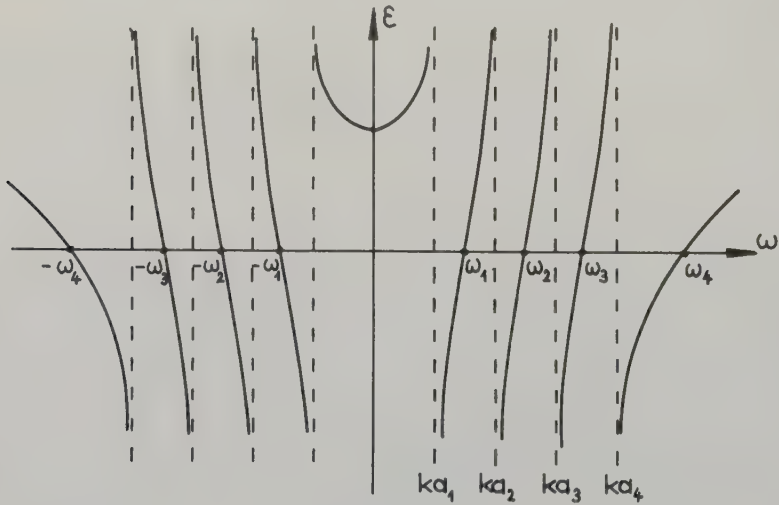


Figure 13

La relation de dispersion possède M paires de racines réelles $\pm\omega_j$, chaque racine étant telle que

$$ka_j < \omega_j < ka_{j+1} \quad (35)$$

Notons que cette propriété est intéressante lorsqu'on recherche toutes les racines de l'équation de dispersion (cas des oscillations libres pour t fini). De plus ω_j est réel, donc on sait où la chercher; le calcul est ainsi très simplifié.

Cependant, ce résultat reste embarrassant car nous ne récupérons pas, a priori, l'amortissement LANDAU. Or, le fait que tous les ω_j sont réels nous rappelle immédiatement le travail de VAN KAMPEN /7/, qui est une alternative du traitement de LANDAU. VAN KAMPEN a montré qu'un plasma stable possède une infinité de fréquences propres réelles, formant un spectre dense sur tout l'axe réel. La superposition de toutes ces fréquences, conduit par un processus de mélange de phases non amorties, à l'amortissement LANDAU. De même, lorsque le nombre M de contours augmente, les fréquences ω_j du "water bag" deviennent denses sur l'axe des fréquences. ROWLANDS /41/ a alors suggéré qu'il était également possible, à l'aide du modèle "water bag" de retrouver l'amortissement LANDAU par mélange de phases de M modes non amortis.

Pour pouvoir effectuer la connexion avec le travail de VAN KAMPEN, nous allons, dans le paragraphe suivant, rechercher les fonctions propres et les fréquences propres du modèle "water bag".

2. CONSTRUCTION D'UNE BASE COMPLETE DE FONCTIONS PROPRES DU "WATER BAG" POUR L'ETUDE DES OSCILLATIONS LIBRES.

2.1. Fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur "water bag".

Nous partons des équations du "water bag" (17a-b-c) que nous réécrivons différemment

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = \frac{e}{m} E$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left(\sum_{j=-M}^M A_j v_j - 1 \right)$$

en supposant que l'indice j varie maintenant de $-M$ à M , la valeur $j=0$ étant omise (ce qui est indiqué par la notation Σ'). Les valeurs négatives de j correspondent à l'indice - des équations (17). Nous posons de même $A_j = -A_{-j}$.

Nous linéarisons ces équations autour de l'équilibre homogène symétrique en vitesse, défini par (29). Avec nos nouvelles notations, nous avons $a_j = -a_{-j}$. Nous posons

$$v_j(x, t) = a_j + w_j(x, t) \quad \text{avec} \quad |w_j| \ll |a_j|$$

et il vient

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} + a_j \frac{\partial w_j}{\partial x} = \frac{e}{m} E$$

(36)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \sum_j' A_j w_j$$

avec la condition de neutralité électrique $\sum_j' A_j a_j = 1$.

Nous définissons alors les transformées de FOURIER de w_j et E par les relations

$$w_j(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}_j(k, t) \exp(-ikx) dk$$

$$E(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(k, t) \exp(-ikx) dk$$

En remplaçant les expressions précédantes dans le système (36), il vient

$$\frac{\partial \hat{w}_j}{\partial t}(k, t) = -ika_j \hat{w}_j(k, t) = -\frac{e}{m} \hat{E}(k, t) \quad (37a)$$

$$-ik \hat{E}(k, t) = \frac{en_0}{\epsilon_0} \sum_j A_j \hat{w}_j(k, t) \quad (37b)$$

Nous cherchons à ce système des solutions de la forme

$$A_j \hat{w}_j(k, t) = V_n^j(k) \exp(i\omega_n t)$$

En éliminant le champ entre les équations (37a) et (37b), nous obtenons

$$ka_j V_n^j(k) + \frac{\omega_p^2}{k} A_j \sum_i V_n^i(k) = \omega_n V_n^j(k) \quad (38)$$

avec $\epsilon(k, \omega_n) = 0$, la fonction ϵ étant définie par (31). L'équation (38) est une équation aux valeurs propres, et ces valeurs propres sont justement solutions de l'équation de dispersion. Les quantités $V_n^j(k)$ sont alors les composantes du vecteur propre $|V_n\rangle$ correspondant à la valeur propre ω_n . Ces quantités sont déterminées par un système homogène d'équations linéaires, obtenu à partir de (38) en faisant varier j de $-M$ à M , en exceptant la valeur $j = 0$. Elles sont donc déterminées à un facteur près. Nous pouvons alors ajouter la condition de normation

$$\sum_j V_n^j(k) = 1 \quad (39)$$

et nous obtenons immédiatement les modes propres du "water bag"

$$V_n^j(k) = \frac{\omega_p^2}{k} \frac{A_j}{\omega_n - ka_j} \quad (40)$$

2.2. Fonctions propres de l'opérateur adjoint.

Ces fonctions propres que nous venons de définir ne sont pas orthogonales entre elles. Nous devons alors introduire un autre groupe de fonctions $\bar{V}_n^j(k)$ qui correspondent aux mêmes valeurs propres ω_n , mais qui sont solutions de l'équation adjointe

$$ka_j \bar{V}_n^j(k) + \frac{\omega_p^2}{k} \sum_i A_{ji} \bar{V}_n^i(k) = \omega_n \bar{V}_n^j(k)$$

Nous introduisons la condition de normation

$$\sum_j A_{jj} \bar{V}_n^j(k) = \frac{k}{\omega_p^2} \quad (41)$$

et nous obtenons les modes propres de l'opérateur adjoint

$$\bar{V}_n^j(k) = \frac{1}{\omega_n - ka_j} \quad (42)$$

2.3. Orthogonalité.

Soit $|V_n(k)\rangle$ le vecteur propre de l'opérateur "water bag", de composantes $V_n^j(k)$, et correspondant à la valeur propre ω_n .

Soit $\langle \bar{V}_m(k)|$ le vecteur propre de l'opérateur adjoint, de composantes $\bar{V}_m^j(k)$, et correspondant à la valeur propre ω_m .

Nous définissons le produit scalaire de $|V_n\rangle$ par $\langle \bar{V}_m|$ par la relation

$$\langle \bar{V}_m | V_n \rangle = \sum_j V_n^j(k) \bar{V}_m^j(k)$$

Si $n \neq m$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle \bar{V}_m | V_n \rangle &= \frac{\omega_p^2}{k} \sum_j' \frac{A_j}{(\omega_m - ka_j)(\omega_n - ka_j)} \\
&= \frac{\omega_p^2}{k(\omega_n - \omega_m)} \left(\sum_j' \frac{A_j}{\omega_m - ka_j} - \sum_j' \frac{A_j}{\omega_n - ka_j} \right) \\
&= \frac{1}{\omega_n - \omega_m} \left(1 - \varepsilon(k, \omega_m) - 1 + \varepsilon(k, \omega_n) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Si $n = m$

$$\langle \bar{V}_n | V_n \rangle = \frac{\omega_p^2}{k} \sum_j' \frac{A_j}{(\omega_n - ka_j)^2} \neq 0$$

Il y a donc orthogonalité mutuelle entre les modes propres du "water bag" et les modes adjoints. Pour la suite, nous poserons $b_n = \langle \bar{V}_n | V_n \rangle$.

2.4. Connexion avec les modes de VAN KAMPEN.

A ce point, il est intéressant de noter la grande similitude avec le traitement de VAN KAMPEN /7/ /8/, dont nous avons déjà parlé à plusieurs reprises. Le point de départ est l'équation de VLASOV linéarisée pour la transformée de FOURIER $\hat{f}_1(k, v, t)$ de la perturbation au premier ordre de la fonction de distribution, soit

$$\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} - ik v \hat{f}_1 - \frac{\omega_p^2}{ik} \frac{dF_0}{dv} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_1 dv = 0$$

La méthode de VAN KAMPEN consiste à chercher des solutions de la forme

$$\hat{f}_1(k, v, t) = \chi_\omega(k, v) \exp i\omega t$$

plutôt que d'introduire les conditions initiales et la transformée de LAPLACE sur le temps comme dans le traitement de LANDAU. Nous avons alors à résoudre l'équation aux valeurs propres

$$k v \chi_\omega(k, v) - \frac{\omega_p^2}{k} \frac{dF_0}{dv} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_\omega(k, v') dv' = \omega \chi_\omega(k, v)$$

La solution de VAN KAMPEN s'écrit sous la forme de la distribution

$$\chi_\omega(k, v) = - \frac{\omega_p^2}{k} \frac{dF_0}{dv} PP \frac{1}{\omega - kv} + \lambda(\omega) \delta(v - \omega/k)$$

le symbole PP désignant la partie principale de CAUCHY, et δ la distribution de DIRAC. La fonction $\lambda(\omega)$ est déterminée par la condition de normation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_\omega(k, v) dv = 1$$

Cette solution existe quel que soit ω , et les valeurs propres ω forment un spectre dense sur tout l'axe réel.

Nous pouvons remarquer la similitude entre χ_ω et les modes propres $|V_n\rangle$, le coefficient A_j jouant le rôle de $-dF_0/dv$; de même, nous pouvons définir les fonctions propres de l'opérateur adjoint. Les calculs de VAN KAMPEN conduisent à la distribution

$$\bar{\chi}_\omega = PP \frac{1}{\omega - kv} + \bar{\lambda}(\omega) \delta(v - \omega/k)$$

où $\bar{\lambda}(\omega)$ est déterminé par la condition de normation

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\chi}_\omega(k, v) \frac{dF_0}{dv} dv = \frac{k}{\omega_p^2}$$

Enfin, les fonctions χ_{ω} et $\bar{\chi}_{\omega}$ sont mutuellement orthogonales, soit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\omega}(k, v) \bar{\chi}_{\omega'}(k, v) dv = b_{\omega} \delta(\omega - \omega')$$

Le modèle "water bag" permet ainsi une discrétisation des modes de VAN KAMPEN. Au lieu d'un spectre de fréquence dense sur tout l'axe réel, le spectre du "water bag" est formé d'un nombre fini de valeurs discrètes ω_n , régulièrement réparties. De plus, les modes propres associés ne sont pas des distributions, mais des fonctions, et peuvent se prêter au calcul numérique. Ces modes propres constituent ainsi le moyen d'utiliser sur ordinateur, la base formée par les modes de VAN KAMPEN. Nous allons en voir un exemple à propos du phénomène de l'amortissement de LANDAU.

2.5. Application au problème de l'amortissement LANDAU.

La solution générale des équations linéarisées du "water bag" (système 37-a-b) peut s'écrire sous forme d'une superposition de ces fonctions propres :

$$A_j \hat{w}_j(k, t) = \sum_n C_n V_n^j(k) \exp(i\omega_n t) \quad (43)$$

Les coefficients C_n dépendent du problème considéré : nous supposons qu'à l'instant initial, le plasma est perturbé sur le mode k , nous donnons à chaque contour une déformation initiale $w_j(k, t=0)$. A cet instant, l'équation (43) s'écrit

$$A_j \hat{w}_j(k, 0) = \sum_n C_n V_n^j(k)$$

En multipliant par $\bar{V}_m^j(k)$ et en sommant sur tous les contours, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_j' A_j \hat{w}_j(k,0) \bar{V}_m^j(k) &= \sum_j' \sum_n C_n \bar{V}_m^j(k) V_n^j(k) \\ &= \sum_n C_n \langle \bar{V}_m(k) | V_n(k) \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne

$$C_n = \frac{1}{b_n} \sum_j' A_j \hat{w}_j(k,0) \bar{V}_n^j(k) \quad (44)$$

Les divers coefficients C_n du développement (43) sont ainsi déterminés simplement en fonction des conditions initiales.

Quant au champ électrique, l'équation de POISSON (37b) permet de l'écrire de la manière suivante

$$E(k,t) = \frac{ien_0}{\epsilon_0 k} \sum_j' \sum_n C_n V_n^j \exp(i\omega_n t)$$

La condition de normation (39) permet de simplifier cette expression qui devient

$$E(k,t) = \frac{ien_0}{\epsilon_0 k} \sum_n C_n \exp(i\omega_n t) \quad (45)$$

A titre d'exemple, considérons une fonction de distribution maxwellienne, approximée par un modèle "water bag" ayant successivement 6, 25 puis 100 contours /42/. Nous supposons qu'à l'équilibre, les contours sont régulièrement répartis. Nous les perturbons initialement de la manière suivante

$$w_j(x,t=0) = a_j (1 + \alpha \cos kx)$$

où α est un paramètre très petit devant 1. Nous en déduisons

$$\hat{w}_j(k,0) = a_j \frac{\alpha}{2}$$

soit

$$C_n = \frac{\alpha \omega_n}{2 \omega_p^2 b_n} = \frac{\alpha}{4 \omega_p^4 \sum_{j=1}^M \frac{2 a_j A_j}{(\omega_n^2 - k^2 a_j^2)^2}}$$

L'équation (45) nous fournit le champ électrique

$$E(k,t) = \frac{1 e n_0}{2 \epsilon_0 k} \alpha \sum_{n=1}^M \left(\omega_p^4 \sum_{j=1}^M \frac{2 a_j A_j}{(\omega_n^2 - k^2 a_j^2)^2} \right)^{-1} \cos \omega_n t$$

Nous avons porté sur la figure 14 le logarithme de l'amplitude du champ électrique en fonction du temps ($\omega_p t$).

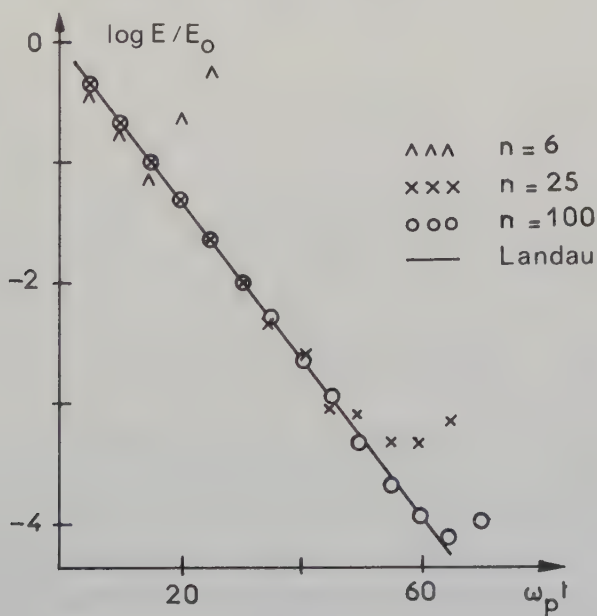


Figure 14

Nous constatons la présence d'un amortissement exponentiel. En prenant respectivement 6, 25 et 100 contours, avec $kD = 0,5$, nous retrouvons la valeur de l'amortissement LANDAU (0,153) avec 10%, 3% et 1% d'erreur. De plus, les temps de validité de notre approximation sont de l'ordre de 15, 40 et 60 ω_p^{-1} respectivement.

En conclusion, ce modèle permet une véritable discrétisation des modes de VAN KAMPEN, et se prête aisément au calcul sur ordinateur. Enfin, l'avantage du modèle "water bag" sur d'autres méthodes de discrétisation, comme la méthode de FOURIER-HERMITE /21/ /22/, déjà citée au premier chapitre, vient de la répartition très régulière des fréquences sur l'axe réel.

3. APPLICATION AU PROBLEME DES OSCILLATIONS FORCEES : IMPEDANCE D'UN CONDENSATEUR DANS UN PLASMA.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que le problème des oscillations libres : après une perturbation initiale, le système évolue librement vers l'équilibre, ou plus exactement vers la neutralité. Sauf pour des fonctions de distribution instables, ces oscillations sont amorties après quelques périodes de plasma ; toute mesure des phénomènes fait donc intervenir des temps très courts. D'un point de vue pratique, ce type d'expérience est plus difficile à mettre en oeuvre que des oscillations forcées, dans lesquelles, après le régime transitoire, toutes les quantités varient comme $\exp(i\omega t)$ où ω est la fréquence imposée.

Nous allons considérer le système constitué par deux grilles planes infinies et parallèles, à la distance d l'une de l'autre, et baignant dans un plasma homogène. Nous supposons que ces grilles sont assez fines pour ne pas interagir mécaniquement avec le plasma. D'un point de vue électrique, elles forment un condensateur plan, que les électrons

peuvent traverser librement. Nous appliquons aux bornes de ce condensateur une tension sinusoïdale de pulsation ω , et d'amplitude suffisamment faible pour rester dans le cadre de la théorie linéaire.

Le calcul de l'impédance d'un tel condensateur est plus complexe que dans le cas d'un diélectrique ordinaire, car le plasma présente une dispersion spatiale. Ce phénomène se traduit dans la constante diélectrique $\epsilon(k, \omega)$ par la présence de la variable k , ce qui nous oblige à remplacer dans les relations de l'électrostatique, les diverses quantités par leur transformée de FOURIER. Ainsi, si $E_{\text{ext}}(k, \omega)$ désigne celle du champ produit par les grilles, la transformée de FOURIER du champ électrique total dans le plasma s'écrit

$$E(k, \omega) = \frac{E_{\text{ext}}(k, \omega)}{\epsilon(k, \omega)}$$

Cette relation nous permet d'obtenir la permittivité relative $\epsilon_r(\omega)$ d'un condensateur plan, à partir de $\epsilon(k, \omega)$ de la manière suivante /43/

$$\frac{1}{\epsilon_r(\omega)} = \frac{d}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{kd}{2}}{\frac{kd}{2}} \right)^2 \frac{1}{\epsilon(k, \omega)} dk \quad (46)$$

Si nous désignons par C la capacité du condensateur dans le vide, son impédance dans le plasma sera

$$Z = \frac{1}{i C \omega \epsilon_r(\omega)}$$

Malheureusement, pour une fonction de distribution $F_0(v)$ quelconque, mais stable, les propriétés de $\epsilon(k, \omega)$ considérée comme une fonction de la variable complexe k ne permettent pas de calculer l'intégrale de la formule (46) par une méthode de résidus (en particulier à cause de l'accumulation des pôles autour de $k = 0$). Il est néanmoins

possible d'utiliser des méthodes numériques /11/, mais elles sont d'une mise en oeuvre compliquée. Lorsque la fonction à l'équilibre $F_0(v)$ est une maxwellienne, il est également possible de l'approcher par des fonctions de CAUCHY généralisées /44/.

Or dans le modèle "water bag", les solutions de $\epsilon(k, \omega) = 0$, (où k est l'inconnue) sont bien réparties, comme dans le cas des oscillations libres. Une étude de l'équation (31) faite en supposant tous les coefficients A_j positifs (nous restreignons notre étude au cas des plasmas stables) montre qu'elle a une série de $2M$ racines $\pm k_n$ (rappelons que ce cas suppose une fonction de distribution $F_0(v)$ symétrique). Toutes ces racines sont réelles sauf la dernière $\pm k_M$ qui peut être soit imaginaire pure, soit réelle, suivant que ω est inférieur ou supérieur à ω_p . Les autres sont bien réparties sur l'axe réel puisque l'on a

$$\frac{\omega}{a_{n+1}} < k_n < \frac{\omega}{a_n}$$

Cette très bonne répartition va nous permettre d'utiliser la méthode des résidus. Pour cela, nous réécrivons (46) sous la forme de deux intégrales.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_r(\omega)} &= \frac{1}{2\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp(ikd)}{k^2 \epsilon(k, \omega)} dk + \frac{1}{2\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \exp(-ikd)}{k^2 \epsilon(k, \omega)} dk \\ &= \frac{1}{2\pi d} (I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Pour le calcul de I_1 , nous considérons dans le plan complexe le contour représenté sur la figure 15.

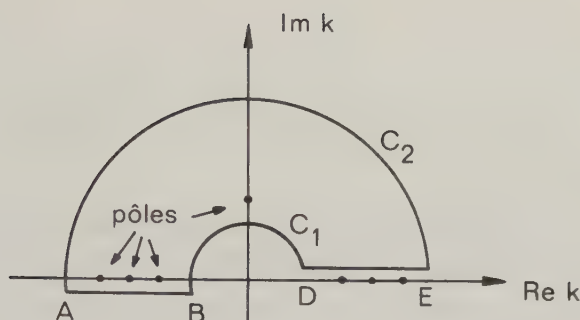


Figure 15

Le contour C_2 est rejeté à l'infini. D'autre part

$$\int_{AB} + \int_{DE} \longrightarrow I_1$$

à condition que le parcours AB soit en-dessous des pôles négatifs et que DE soit au-dessus des pôles positifs.

En effet, supposons que la fréquence ait une petite partie imaginaire (qui doit être positive, puisque dans ce cas, le comportement dans le temps des diverses quantités est décrit par une transformée de LAPLACE). Les pôles de l'intégrale sur l'axe réel possèdent alors une petite partie imaginaire positive si ces pôles sont négatifs, et vice-versa. Cela revient à passer en-dessous de l'axe réel sur le parcours AB et au-dessus de cet axe sur le parcours DE.

Nous avons alors en appliquant la méthode des résidus

$$I_1 = \int_{C_1} \frac{-ikd}{k^2 \varepsilon(0, \omega)} dk = 2i\pi \sum_{n=1}^M \frac{1 - \exp(-ik_n d)}{k_n^2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} \right)_{k=-k_n}}$$

soit, en remarquant que l'intégrale sur C_1 ne tend pas vers zéro

$$I_1 = \frac{\pi d}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - \sum_{n=1}^M \frac{\pi d}{\omega_p^2 \sum_{j=1}^N k_{nj}^2 \frac{2a_j A_j}{(\omega^2 - k_{nj}^2 a_j^2)^2}} \cdot \frac{1 - \exp(-ik_n d)}{ik_n d}$$

Pour le calcul de I_2 , il faut fermer le contour C_2 dans le demi-plan $\text{Im } k$ négatif. Nous vérifions sans peine que $I_1 = I_2$.

Finalement, la permittivité relative du plasma pour un condensateur plan s'écrit

$$\frac{1}{\epsilon_r(\omega)} = \frac{1}{\epsilon_f(\omega)} - \sum_{n=1}^M C_n \frac{1 - \exp(-ik_n d)}{ik_n d} \quad (47)$$

avec

$$\epsilon_f(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \text{constante diélectrique du plasma froid (9)}$$

$$C_n = \left(\omega_p^2 \sum_{j=1}^M k_{nj}^2 \frac{2a_j A_j}{(\omega^2 - k_{nj}^2 a_j^2)^2} \right)^{-1}$$

Dans la formule (47) la sommation s'effectue sur les M pôles k_n où k_n est considéré comme un nombre positif quand il est réel. Le dernier pôle k_M est remplacé par $-ik_0$ avec $k_0 > 0$ quand il est imaginaire.

Le modèle "water bag" peut être appliqué aisément /45/ à d'autres dispositifs expérimentaux de sonde radiofréquence avec d'autres géométries (par exemple le condensateur sphérique grillagé). Nous avons traité ici un cas volontairement simple pour mettre en évidence l'intérêt du modèle "water bag" qui tient à deux raisons essentielles : régularité des racines de l'équation de dispersion et possibilité d'approximer toute fonction de distribution, même obtenue expérimentalement.

4. REMARQUES.

Deux remarques complémentaires sont intéressantes à souligner à propos de l'utilité du modèle "water bag" en théorie linéaire.

Considérons tout d'abord, en géométrie tridimensionnelle, une fonction de distribution telle que les électrons soient tous monocinétiques, les vitesses étant réparties d'une manière isotrope. Si $F_0(v)$ est la fonction de distribution de la projection des vitesses sur n'importe quelle direction, nous aurons $F_0(v) = A$ si $|v| < a$ et $F_0(v) = 0$ si $|v| > a$. C'est le modèle "water bag simple" dont l'intérêt s'en trouve ainsi renforcé.

D'autre part, le modèle "water bag" multiple correspond à l'approximation de $F_0(v)$ par une fonction en escalier. D'autres approximations ont été envisagées précédemment. En particulier, DAWSON /81/ a imaginé un modèle dans lequel le plasma est représenté par une série de faisceaux de températures nulles. Il approxime ainsi $F_0(v)$ de façon grossière par une somme de fonctions de DIRAC. La relation de dispersion obtenue est simple, mais malheureusement les pôles sont complexes. Le modèle "water bag" offre donc une meilleure représentation.

CHAPITRE IV

OSCILLATIONS DE PLASMA : PROBLEMES FAIBLEMENT NON LINEAIRES ET COMPARAISONS DE MODELES

Ce chapitre est consacré au problème des oscillations électrostatiques longitudinales consécutives à une perturbation d'un plasma homogène, telle que la densité initiale soit $n = n_0(1 + \alpha \cos kx)$. Nous envisagerons plus précisément le comportement faiblement non linéaire. Ce problème implique la résolution de l'équation de VLASOV au delà du terme du premier ordre $f_1(x, v, t)$ envisagé dans la théorie de LANDAU.

On conçoit donc l'utilité de disposer de modèles mathématiques plus simples, dont on peut pousser plus loin l'étude tant analytique que numérique.

Un modèle qui se prête particulièrement bien à cette étude est le modèle "water bag" à un contour, qui tout en étant obtenu de manière rigoureuse à partir de l'équation de VLASOV, présente les simplifications de l'hydrodynamique. Dans tout ce chapitre nous n'envisagerons que le cas d'un seul contour ; aussi chaque fois que le mot "water bag" apparaîtra, il faudra comprendre "water bag" à un contour.

Dans un premier temps, nous étudierons les effets non linéaires obtenus à partir de ce modèle. Nous envisagerons ensuite d'autres modèles, en particulier les modèles hiérarchisés et nous poserons la question de savoir s'il existe effectivement des conditions initiales telles que le modèle de VLASOV puisse être remplacé par un modèle plus simple conduisant aux mêmes effets non linéaires.

Nous verrons alors comment le "water bag" permet de répondre à cette question.

1. LE TRAITEMENT NON LINEAIRE DES OSCILLATIONS DE PLASMA PAR LE MODELE "WATER BAG".

Dans cette partie, nous allons appliquer le modèle "water bag" à l'étude des oscillations électrostatiques longitudinales de plasma, en l'absence de champ extérieur. Ce modèle décrit un plasma chaud, non collisionnel, bien que le système (20) soit semblable à celui du plasma froid. La seule différence provient du terme de pression qui traduit l'influence des effets thermiques.

Or, les équations du plasma froid, bien que non linéaires, sont cependant solubles en utilisant la description en variable de LAGRANGE, développée par KONYUKOV /46/ et par KALMAN /47/. C'est ce formalisme que nous allons introduire dans le modèle "water bag", et qui va nous permettre de mettre en évidence l'interaction des effets thermiques et non linéaires.

1.1. La description du "water bag" en variables de LAGRANGE.

Nous partons du système hydrodynamique équivalent au "water

bag" (20). Nous supposons la distribution ionique homogène, ce qui revient à considérer la densité ionique n_i constante et égale à la densité moyenne électronique n_0 . Les équations de conservation des particules et de la quantité de mouvement, l'équation de POISSON, et l'équation d'adiabaticité s'écrivent respectivement

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nu) = 0 \quad (48a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{m} E - \frac{1}{mn} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (48b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} (n - n_0) \quad (48c)$$

$$P = \frac{m}{12A^2} n^3 \quad (48d)$$

La description en variable de LAGRANGE fait appel à une fonction $\psi(x,t)$ définie de la façon suivante

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{n}{n_0} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{nu}{n_0} \quad (49)$$

Ces relations montrent que l'équation (48a) est automatiquement satisfaite. De plus, nous avons

$$\frac{d\psi}{dt} = u \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

Cette propriété est mise à profit pour changer de variables, et passer du système (x,t) au système (ψ,t) . L'équation de POISSON (48c) compte-

tenu de (49) s'écrit dans ce nouveau système, dit système des variables de LAGRANGE

$$G(\psi, t) + x(\psi, t) + \psi = 0 \quad (50)$$

où $G(\psi, t)$ représente la quantité $eE/m\omega_p^2$ exprimée en fonction de la variable de LAGRANGE ψ . D'autre part, le terme de pression peut encore s'écrire

$$-\frac{1}{mn} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{4A^2} n \frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{n_0^2}{4A^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

En variables de LAGRANGE ce terme devient, avec $a = n_0/2A$

$$a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^{-4}$$

L'équation (48b) devient alors

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} \left(1 + \frac{\partial G}{\partial \psi} \right)^{-4} + \omega_p^2 G = 0 \quad (51)$$

Les équations (50) (51) fournissent donc une solution paramétrique du problème. Il est intéressant de constater que le terme non linéaire $u \partial u / \partial x$ de l'équation (48b) a disparu dans le nouveau formalisme. En revanche, le terme central de (51) est non linéaire. Il provient du terme de pression et traduit l'influence des effets thermiques.

La variable ψ utilisée dans notre formalisme, est telle que $d\psi/dt = 0$, c'est-à-dire que ψ reste une constante pour des points occupés successivement par une même particule. Nous pouvons donc considérer les différentes valeurs de ψ comme des "repérages" attachés à chaque particule. En ce sens, ψ est une variable de LAGRANGE /48/ par opposition aux variables d'EULER.

1.2. Le cas du plasma froid.

Lorsque le plasma est à température nulle, les équations (50) (51) peuvent être exactement résolues, ce qui constitue un intérêt majeur de cette méthode lagrangienne /46/ /47/.

Dans ce cas, en effet, la vitesse thermique $v_T = a/\sqrt{3}$ est nulle. La solution générale exacte de (51) avec $a = 0$ s'écrit

$$G(\psi, t) = A(\psi) \sin(\omega_p t) + B(\psi) \cos(\omega_p t) \quad (52)$$

Le changement de coordonnées entre x et ψ étant défini par

$$x = -\psi - A(\psi) \sin(\omega_p t) - B(\psi) \cos(\omega_p t) \quad (53)$$

Cette solution, très simple, est bien entendu correcte à tout ordre de non linéarité.

Cependant, la transformation des coordonnées lagrangiennes en coordonnées eulériennes requiert la donnée explicite des conditions initiales, et suppose, en général la résolution d'équations algébriques transcendantes. Ceci ne peut se faire que par des méthodes d'approximation /49/ sur lesquelles nous reviendrons ultérieurement, ou par des méthodes numériques /50/, en éliminant ψ entre les équations (52) et (53).

Remarquons enfin qu'il existe une restriction à la classe de problèmes pouvant être traités par cette méthode : l'inversion de la formule (53) n'est possible que si le jacobien de la transformation ne s'annule pas, c'est-à-dire si $\partial x / \partial \psi \neq 0$. Ceci signifie physiquement que la densité reste finie à chaque instant, puisque des électrons ayant même "repérage" ψ ne doivent pas se trouver au même point x .

1.3. Traitement du terme thermique.

Nous supposons des conditions périodiques, et nous imposons

à l'instant initial une perturbation de densité d'amplitude $\alpha < 1$. Le paramètre α est une mesure de la non linéarité du problème. Or, nous avons vu au paragraphe précédent, que la description en variables de LAGRANGE fournissait, dans le cas du plasma froid, une solution correcte à tous les ordres en α . Il nous faut donc examiner dans quelle mesure nous pouvons traiter correctement les différents ordres en α lorsque le terme thermique est présent.

$\partial G / \partial \psi$ étant d'ordre α , nous pouvons remplacer $(1 + \partial G / \partial \psi)^{-4}$ par son développement de TAYLOR. Nous posons alors

$$G = \alpha G^{(1)} + \alpha^2 G^{(2)} + \dots + \alpha^n G^{(n)} + \dots$$

En identifiant les termes en $\alpha, \alpha^2, \dots$ dans (51), nous constatons que, pour obtenir une solution correcte pour les n premiers ordres en α , il nous faut tenir compte des n premiers termes du développement de $(1 + \partial G / \partial \psi)^{-4}$, ce qui impose à la non linéarité d'être assez faible.

Nous pourrions alors résoudre le système obtenu par approximations successives en déterminant $G^{(1)}$, qui réinjecté dans (51), donnerait $G^{(2)}$ et ainsi de suite /51/. Malheureusement, comme dans toute méthode de ce genre, on ne peut guère aller au-delà du deuxième ordre, les calculs devenant inextricables. L'intérêt de la méthode lagrangienne est alors perdu. Il nous faut donc procéder autrement.

Les conditions périodiques du problème permettent de développer $G(\psi, t)$ en série de FOURIER sur ψ

$$G(\psi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(t) \exp(in k \psi)$$

L'équation de base (51) s'écrit si nous posons

$$\omega_n^2 = \omega_p^2 + n^2 k^2 a^2$$

$$\frac{d^2 G_n}{dt^2} + \omega_n^2 G_n = 4a^2 k^3 \sum_{p=-\infty}^{\infty} p^2 (n-p) G_p G_{n-p} \quad (54)$$

$$+ 10a^2 k^4 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} p^2 r (n-p-r) G_p G_r G_{n-p-r} + \dots$$

Le deuxième membre, qui provient du développement de TAYLOR de $(1 + \partial G / \partial \psi)^{-4}$ est d'ordre $k^2 a^2 / \omega_p^2 = 3k^2 D^2$ par rapport au premier (D est la distance de DEBYE). Nous allons alors utiliser un développement en puissances de ce paramètre pour traiter le terme thermique.

Pour cela :

a) Nous résolvons (54) sans second membre, en tenant compte des conditions initiales du problème envisagé, ce qui revient à remplacer dans l'équation de base (51) le terme $(1 + \partial G / \partial \psi)^{-4}$ par 1.

b) Nous résolvons ensuite (54) en suivant la méthode de perturbation de KRYLOV - BOGOLYUBOV - MITROPOLSKII /52/ /53/, le paramètre de petitesse étant $k^2 D^2$ et non α comme dans un calcul classique de perturbation. Nous nous arrêterons au premier ordre en $k^2 D^2$. De cette manière, nous sauvegardons l'intérêt de la méthode lagrangienne, qui est de pouvoir traiter tous les ordres de non linéarité en α . Cela suppose, bien entendu, de tenir compte de tous les termes du développement du terme thermique. (En fait, pour éviter d'alourdir les équations, nous ne traiterons que les trois premiers termes de ce développement, ce qui limitera la validité de nos résultats à l'ordre trois en α).

c) Enfin, à partir de la solution déterminée précédemment, nous revenons au système (x, t) afin d'obtenir la forme explicite du champ électrique. Ceci ne pourra se faire analytiquement que pour des faibles non linéarités. Sinon nous serons obligés de recourir aux méthodes numériques.

1.4. Application à l'étude des ondes électrostatiques longitudinales /54/.

Nous supposons que nous excitions l'onde, à l'instant initial,

sur le mode k , en perturbant la densité électronique sans modifier la vitesse moyenne du plasma, soit

$$n(x, t=0) = n_0 \{1 + \alpha \cos(kx)\} \quad (55a)$$

$$u(x, t=0) = 0 \quad (55b)$$

La résolution de (54) sans second membre donne une solution générale de la forme

$$G_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t) \quad (56)$$

avec
$$x = -\psi - A_n \cos(\omega_n t) - B_n \sin(\omega_n t) \quad (57)$$

La condition initiale (55b) s'écrit encore

$$u(\psi, 0) = \frac{\partial x}{\partial t}(\psi, 0) = 0$$

ce qui nous donne $B_n = 0$ quelque soit n . A_n est alors le coefficient de FOURIER de $G(\psi, t)$ à l'instant initial. La formule d'inversion de FOURIER nous donne

$$A_n = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} G(\psi, t=0) \exp(-ink\psi) d\psi$$

Or la condition (55a) nous permet d'écrire

$$\frac{n(x, 0)}{n_0} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 1 + \alpha \cos(kx)$$

$$\text{soit} \quad \psi = -x - \frac{\alpha}{k} \sin(kx)$$

En revenant à x , il vient

$$A_n = \frac{k}{2\pi} \int_0^{-2\pi/k} \frac{\alpha}{k} \sin(kx) \exp\left(-ink\left(-x - \frac{\alpha}{k} \sin kx\right)\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

Après quelques transformations trigonométriques, nous pouvons faire apparaître l'intégrale

$$J_p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ipy + it \sin(y)) dy$$

qui n'est autre que la fonction de BESSEL de première espèce, d'ordre p. Nous obtenons alors A_n sous la forme

$$2ik A_n = \alpha \{J_{n+1}(n\alpha) - J_{n-1}(n\alpha)\} - \frac{\alpha^2}{2} \{J_{n+2}(n\alpha) - J_{n-2}(n\alpha)\} \quad (58)$$

Nous pouvons vérifier d'après cette formule, que A_n est d'ordre α^n . Cette propriété est mise à profit pour simplifier l'équation (54) en ne tenant compte que des trois premiers ordres en α . Ainsi, le premier harmonique $G_1(t)$ vérifie l'équation

$$\frac{d^2 G_1}{dt^2} + \omega_1^2 G_1 = 3k^2 D^2 (8i\omega_p^2 k G_1 G_2 + 10\omega_p^2 k^2 G_1^3) \quad (59)$$

dont la solution sans second membre s'écrit

$$G_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$$

La deuxième étape de notre méthode consiste à résoudre (59) et les deux autres équations pour G_2 et G_3 par la méthode de KRYLOV - BOGOLYUBOV - MITROPOLSKII. Conformément à ce schéma, nous cherchons une solution de la forme ($n = 1, 2, 3$)

$$G_n = A_n \cos \phi_n + 3 k^2 D^2 G_n^{(1)}(\phi_n)$$

où l'amplitude A_n est maintenant considérée comme une fonction lentement variable du temps par la relation

$$dA_n/dt = 3 k^2 D^2 C_n$$

ϕ_n est une nouvelle variable de phase, telle que

$$d\phi_n/dt = \omega_n + 3 k^2 D^2 \Omega_n$$

Les paramètres C_n et Ω_n sont ajustés de manière à ce que la solution obtenue ne contienne pas de termes séculaires (c'est-à-dire de termes croissants comme t^p).

En identifiant les termes d'ordre $3k^2 D^2$, l'équation (59) à laquelle satisfait $G_1^{(1)}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \frac{d^2 G_1^{(1)}}{d\phi_1^2} + \omega_1^2 G_1^{(1)} = & 2 C_1 \omega_1 \sin \phi_1 + (2A_1 \omega_1 \Omega_1 + \frac{15}{2} \omega_p^2 k^2 A_1^3) \cos \phi_1 \\ & + 8i \omega_p^2 k A_1 A_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 + \frac{5}{2} \omega_p^2 k^2 A_1^3 \cos 3\phi_1 \end{aligned}$$

Pour que cette équation ne comporte pas de termes séculaires, il faut que les coefficients de $\sin \phi_1$ et $\cos \phi_1$ soient nuls, soit

$$C_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Omega_1 = -\frac{15}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} k^2 A_1^2$$

La même procédure effectuée sur $G_2^{(1)}$ et $G_3^{(1)}$ montre que

$$C_2 = C_3 = 0 \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \Omega_3 = 0$$

Nous aboutissons donc à deux résultats importants

- l'amplitude des harmoniques reste constante au cours du temps, et a pour valeur celle donnée par l'équation (58).
- l'interaction des effets thermiques et non linéaires a pour conséquence un déplacement de la première fréquence ω_1 , qui devient

$$\omega_1' = \omega_1 + 3k^2 D^2 \Omega_1$$

Compte tenu du fait que

$$A_1^2 = -\frac{\alpha^2}{4k^2} + O(\alpha^4)$$

nous obtenons la relation de dispersion non linéaire /55/

$$\omega_1'^2 = \omega_p^2 + 3 k^2 v_T^2 + \frac{45}{8} \alpha^2 k^2 v_T^2 \quad (60)$$

Nous ne calculerons pas $G_1^{(1)}$ et $G_2^{(1)}$. Par contre, $G_3^{(1)}$ comporte un terme qui varie comme

$$(\cos \omega_3 t - \cos \omega_1' t) / (\omega_1'^2 - \omega_3^2)$$

Pour des temps courts devant $(\omega_3 - \omega_1')^{-1}$, il croît comme t . Il nous faudra en fait tenir compte de ce terme comme un terme d'ordre 0 en $k^2 D^2$ dans G_3 .

En rassemblant tous ces résultats, la solution paramétrique du champ électrique à un instant quelconque, s'écrit

$$\begin{aligned} -k G(\psi, t) = & (\alpha - \alpha^3/8) \cos \omega_1' t \sin k\psi + (\alpha^2/2) \cos \omega_2 t \sin 2k\psi \\ & + (3\alpha^3/64) (3\cos \omega_3 t + 5\cos \omega_1' t) \sin 3k\psi + \dots \end{aligned} \quad (61)$$

La dernière étape du calcul consiste à revenir au système de variables (x, t) . Pour cela, nous devons résoudre par rapport à ψ l'équation (50) que nous réécrivons

$$\psi = -x - G(\psi, t)$$

Or, d'après un théorème sur les fonctions implicites /56/ (que JACKSON /49/ a utilisé à propos du plasma froid) nous savons que cette équation possède une racine, et une seule, pourvu que $\alpha < 1$, et qui est telle que

$$\psi = -x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (-x)^{n-1}} (G(-x, t))^n$$

Le deuxième terme du second membre correspond à la fonction $G(\psi(x))$, c'est-à-dire à $eE(x)/m\omega_p^2$. Par conséquent

$$\frac{e}{m\omega_p^2} E(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(G(-x,t) \right)^n$$

Compte tenu de la solution paramétrique (61), l'équation précédente nous donne la solution explicite du champ électrique à l'instant t .

$$\frac{e}{m\omega_p^2} k E(x,t) = \epsilon_1 \sin kx + \epsilon_2 \sin 2kx + \epsilon_3 \sin 3kx + \dots \quad (62)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = & \alpha \cos \omega_1' t + \frac{\alpha^3}{32} (8 \cos \omega_1' t \cos \omega_2 t - 7 \cos \omega_1' t - \cos 3\omega_1' t) \\ & + O(\alpha^3 k^2 D^2) \end{aligned}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\alpha^2}{4} (1 - 2 \cos \omega_2 t + \cos 2\omega_1' t) + O(\alpha^3 k^2 D^2)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_3 = & \frac{3\alpha^3}{64} (13 \cos \omega_3 t + \cos \omega_1' t + 2 \cos 3\omega_1' t - 16 \cos \omega_1' t \cos \omega_2 t) \\ & + O(\alpha^3 k^2 D^2) \end{aligned}$$

Ces résultats généralisent ceux obtenus par GRANT et FEIX /21/ pour le plasma froid et pour les mêmes conditions initiales. Les effets thermiques se manifestent donc de deux manières :

a) le mode fondamental du champ électrique ϵ_1 oscille à une fréquence, qui, par suite de l'interaction des effets non linéaires et thermiques, est légèrement supérieure à celle obtenue dans la théorie linéaire, la différence étant de l'ordre de $\alpha^2 k^2 D^2$.

b) les harmoniques d'ordre supérieur qui apparaissent par suite des effets non linéaires, sont une superposition de fonctions sinusoïdales qui oscillent avec des fréquences légèrement différentes $\omega_1', \omega_2, \omega_3 \dots$. Les déphasages introduits par l'interaction de ces diverses fréquences détruisent le caractère périodique démontré dans le cas du plasma froid, et introduisent des pseudo-battements.

Pour mettre en évidence ces battements, nous avons tracé l'évolution du champ total en fonction du temps, en réalisant l'élimination de ψ directement sur ordinateur. Ce procédé nous permet ainsi de considérer des valeurs de α et kD assez fortes.

La figure 16 montre l'évolution du champ en fonction du temps au point $x = k^{-1}$, pour $\alpha = 0,1$ et $kD = 0,2$.

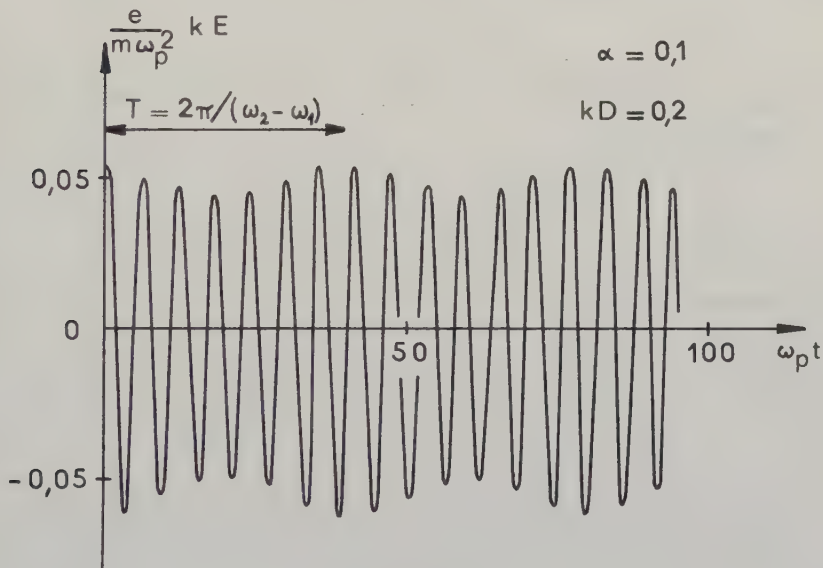


Figure 16

Nous voyons apparaître le phénomène de battements dû principalement au mélange des deux fréquences ω_1' et ω_2 . Nous pouvons vérifier sur cette courbe que la période des battements est bien

$$\omega_p T = \frac{2\pi\omega_p}{\omega_2 - \omega_1} \approx \frac{2\pi}{(1 + 12k^2 D^2)^{1/2} - (1 + 3k^2 D^2)^{1/2}} \approx 39,7$$

1.5. Comparaison avec la simulation numérique du "water bag".

Les hypothèses délicates qui ont été avancées lors du traitement des termes non linéaires dans la théorie précédente doivent être testées. Pour cela, nous allons effectuer des "expériences numériques", en intégrant numériquement les équations du modèle, puis en comparant les résultats obtenus avec les résultats théoriques exposés précédemment. Nous pouvons ainsi vérifier la cohérence interne de notre théorie.

Nous partons des équations de base du "water bag" à un contour (18) que nous décomposons en série de FOURIER de mode fondamental k . Les composantes sont

$$v_r^{\pm}(t) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} v^{\pm}(x,t) \exp(-irkx) dx$$

et le système (18) devient

$$\frac{d}{dt} v_r^{\pm}(t) + ik \sum_{s=-N}^N s v_s^{\pm}(t) v_{r-s}^{\pm}(t) = \frac{\omega_p^2}{2\alpha i k r} (v_r^+ - v_r^-) \quad (63)$$

avec $r = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$.

Le nombre de composantes N est choisi suffisamment grand pour assurer la précision de la méthode. (En général N est de l'ordre de 5). Le système d'équations défini par (63) est résolu numériquement grâce à la méthode de RUNGE - KUTTA à quatre approximations /57/. Le pas d'intégration choisi est $h = 0,05 \omega_p^{-1}$. L'erreur relative commise par pas, de l'ordre h^5 , est ainsi tout à fait négligeable.

1.5.1. Vérification de la dérive de fréquence.

La relation de dispersion non linéaire (60) a été retrouvée récemment par DEWAR et LINDL /58/. Pour des conditions initiales

différentes (ondes progressives) T. COFFEY /59/ retrouve une relation du même type que (60), le coefficient $45/8$ étant remplacé par $15/2$.

Cette dérive de fréquence du mode fondamental peut être mise en évidence en portant sur un graphique (figure 17) en fonction du temps le déphasage entre la courbe numérique du premier harmonique obtenue par résolution numérique de (63), et la solution de la théorie linéaire ($ekE_1/m\omega_p^2 = \alpha \cos \omega_1 t$).

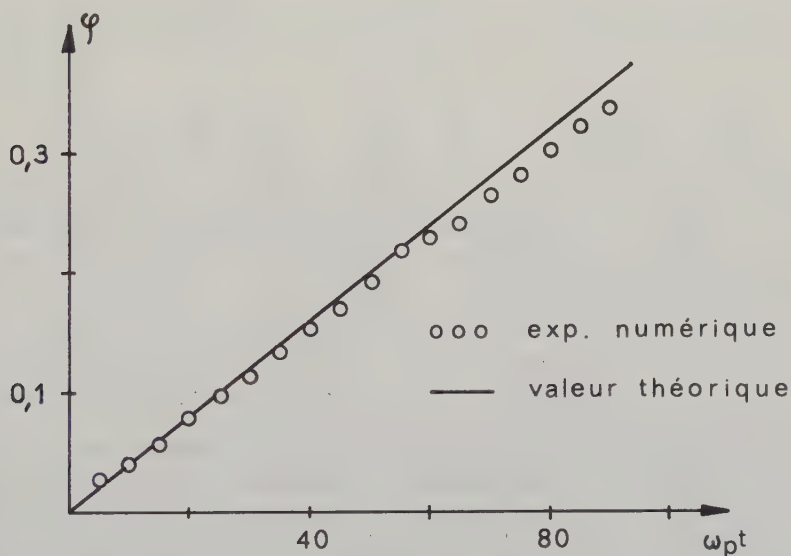


Figure 17

Ce déphasage croît linéairement avec le temps, avec une pente de 0,0038 pour $\alpha = 0,2$ et $kD = 0,2$. A cause de la petitesse de la dérive de fréquence, nous avons été obligés de considérer d'assez fortes non linéarités. En dépit de ce fait, il est remarquable de constater que l'accord avec la valeur théorique de la pente (soit 0,0040) est remarquable.

1.5.2. Harmoniques.

La figure (18) représente le 2ème et le 3ème harmoniques du champ électrique (ϵ_2 et ϵ_3).

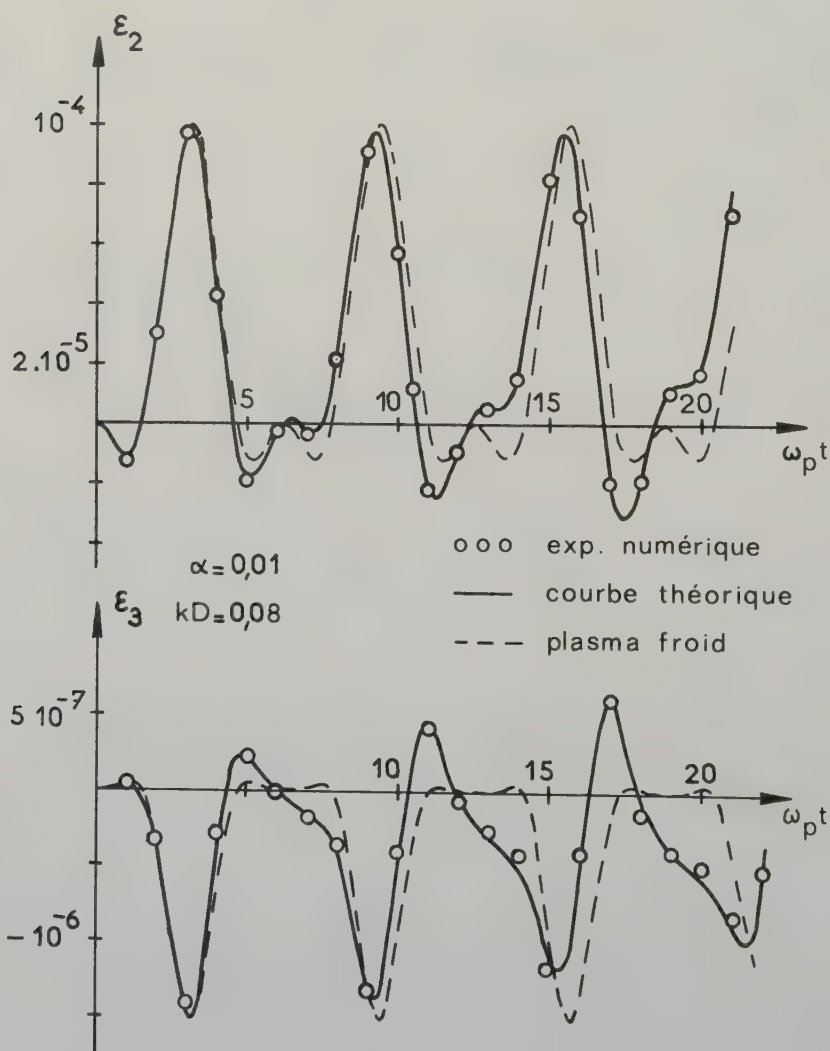


Figure 18

L'accord théorie - "expérience" est excellent. Sur la figure (18) nous avons porté en plus la courbe de plasma froid (obtenue en faisant tendre $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ vers ω_p). La différence importante constatée pour $t > 10 \omega_p^{-1}$ nous assure que la théorie basée sur la description lagrangienne tient correctement compte des effets thermiques, du moins tant que α et kD sont assez inférieurs à l'unité.

2. LES MODELES HIERARCHISES DANS LE TRAITEMENT DES OSCILLATIONS.

Les résultats que nous avons obtenus à l'aide du modèle "water bag", montrent l'utilité de disposer de modèles mathématiques simples dont on peut pousser assez loin l'étude tant numérique qu'analytique. Encore faut-il connaître les limites de validité de ces modèles, les problèmes auxquels ils peuvent être appliqués, le temps au bout duquel ils cessent d'être valables etc...

Les modèles "hiérarchisés" sont particulièrement intéressants : on suppose qu'un processus simple permet de générer une suite de modèles (une "hiérarchie") de plus en plus exacts, qui converge vers la solution correcte. (Les modalités de convergence étant souvent à préciser et pouvant donner lieu à des problèmes délicats).

2.1. Le modèle hydrodynamique et le "water-bag".

Le premier modèle se rattachant à ce type est le modèle hydrodynamique, que nous avons déjà rencontré (chapitre I). Rappelons que ce modèle est obtenu en prenant les moments successifs de l'équation de VLASOV. Le système obtenu est en fait un système ouvert, c'est-à-dire que le moment d'ordre 2 implique le moment d'ordre 3, et ainsi de suite. En hydrodynamique, on utilise la relation adiabatique

$$\frac{d}{dt} (P_n^{-\gamma}) = \frac{\partial}{\partial t} (P_n^{-\gamma}) + u \frac{\partial}{\partial x} (P_n^{-\gamma}) = 0$$

qui se justifie rigoureusement pour une fréquence de collisions infinie. γ est alors le rapport des chaleurs spécifiques et vaut 5/3 pour un gaz monoatomique.

Bien qu'une telle relation n'ait pas de sens pour un plasma non collisionnel, la relation précédente a été longtemps employée avec $\gamma = 3$. On justifiait ce fait en remarquant que la relation de dispersion (5) pour les grandes longueurs d'onde était correctement obtenue par ce modèle (avec $\gamma = 3$) jusqu'au premier ordre en $k^2 D^2$.

La position du modèle hydrodynamique s'éclaire singulièrement lorsqu'on considère le modèle "water bag" qui contrairement au modèle hydrodynamique ne prétend pas décrire le système par les deux premiers moments de $f(x, v, t)$ mais étudie un sous-ensemble de conditions initiales telles que $f = A$ pour $v^- < v < v^+$. Ce modèle obéit aux équations hydrodynamiques, à condition de modifier la relation adiabatique qui devient

$$\frac{\partial}{\partial t} (P_n^{-3}) = \frac{\partial}{\partial x} (P_n^{-3}) = 0$$

Les deux relations adiabatiques sont formellement analogues. Mais, comme nous l'avons vu au chapitre II, elles ne conduisent aux mêmes résultats que pour un problème d'oscillations linéaires. En revanche, elles ne sont plus équivalentes dès que l'on considère un équilibre inhomogène, ou un problème non linéaire.

2.2. Le modèle FOURIER - HERMITE.

Un autre modèle particulièrement intéressant est le modèle FOURIER-HERMITE, qui est utilisé essentiellement d'un point de vue numérique /21/ /22/. Là encore, on utilise les moments de l'équation de

VLASOV (ou plus précisément une combinaison de ces moments). En effet, d'après (7) la transformée de FOURIER-HERMITE de la fonction de distribution s'écrit

$$a_{rs}(t) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \exp(-irkx) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s!v_0} f(x,v,t) H_s\left(\frac{v}{v_0}\right) dv$$

Les premiers polynômes d'HERMITE étant $H_0 = 1$, $H_1 = v/v_0$.

Nous remarquons que a_{r0} et a_{r1} sont simplement les transformées de FOURIER de n et nv . En remplaçant la formule précédente dans l'équation de VLASOV, les fonctions $a_{rs}(t)$ doivent satisfaire au système différentiel

$$\frac{d}{dt} a_{rs}(t) + irk v_0 \{a_{r,s-1} + (s+1) a_{r,s+1}\} - \frac{e}{mv_0} \sum_q E_q a_{r-q,s-1} = 0 \quad (64)$$

Ce système est également ouvert (a_{rs} impliquant $a_{r,s+1}$). La fermeture est obtenue en écrivant qu'à partir d'un certain rang $s > N_H$ on a $a_{rs} = 0$. Contrairement à la relation de fermeture de l'hydrodynamique qui s'appuyait sur des considérations physiques, cette relation est une simple approximation numérique, qui implique seulement que $f(v)$ n'a pas une microstructure trop compliquée (les polynômes d'HERMITE pour un indice s élevé se comportant comme des fonctions sinusoïdales de période $s^{-1/2}$). Malheureusement, les "expériences" numériques faites avec ce modèle ont montré que l'équation de VLASOV développe une microstructure de plus en plus complexe au cours du temps. Ce résultat pessimiste doit être corrigé par quatre considérations:

a) A partir d'une condition initiale raisonnable, il faut un certain temps à la microstructure pour se développer. En prenant N assez élevé on peut rejeter ces difficultés aussi loin que l'on veut dans le temps.

b) Les grandes longueurs d'onde sont bien traitées avec un nombre relativement petit de composantes d'HERMITE. Ceci se conçoit bien

si l'on considère que le couplage entre a_{rs} et $a_{r,s+1}$ provient du terme $v \partial f / \partial x$ de l'équation VLASOV, qui est d'autant plus petit que k est plus petit.

c) La microstructure de $f(v)$ n'a pas besoin d'être connue avec précision pour l'évolution de grandeurs plus macroscopiques, comme le champ électrique. Cet argument tombe cependant en défaut pour les phénomènes du genre "écho".

d) La présence de collisions permet de fermer le système en amenant un effet physique qui justement détruit la microstructure /60/. Très grossièrement, si ν est la fréquence de collisions des électrons, le nombre de composantes d'HERMITE à conserver est ω_p / ν .

Nous voyons donc que le modèle FOURIER-HERMITE est un modèle "hiérarchisé" ; son emploi en tant que modèle numérique est particulièrement intéressant pour simuler des phénomènes faiblement non linéaires de grandes longueurs d'onde.

2.3. Le problème de la comparaison des modèles.

La question posée est la suivante : existe-t-il des conditions initiales telles que le modèle de VLASOV puisse être remplacé par un modèle plus simple (du type hydrodynamique "water bag") ?

Nous voyons tout de suite qu'il ne peut s'agir que d'oscillations de grandes longueurs d'onde, les petites longueurs d'onde nécessitant le traitement de $f(x,v)$.

Il ne peut également pas être question d'envisager un problème trop fortement non linéaire qu'on ne saurait pas résoudre (couplages rapides entre grandes et petites longueurs d'onde).

Considérons alors le problème le plus simple possible : celui d'une oscillation linéaire autour d'un équilibre homogène pour des grandes longueurs d'onde. Les modèles "water bag" et hydrodynamique donneront

alors uniquement deux pôles $\pm \omega_k$ avec $\omega_k^2 = \omega_p^2 + 3 k^2 v_T^2$ (loi de BOHM-GROSS). Le traitement correct de l'équation de VLASOV redonne bien ces deux pôles (pôles de LANDAU), avec une correction d'ordre $k^4 D^4$, et un amortissement très faible (amortissement LANDAU).

Mais il existe en plus d'autres pôles qui, pour k tendant vers 0, se comportent comme $\omega_k^j = \alpha^j k$. Ces pôles propagent des ondes du type sonore qui traduisent le caractère cinétique du plasma. Ces ondes sont faiblement excitées /10/ (avec un niveau d'excitation qui s'annule avec k), mais aussi faiblement amorties.

C'est l'influence de ces autres pôles et la possibilité de trouver des conditions initiales telles que leur influence soit nulle qui nous intéressent. Remarquons que nous avons déjà une réponse à cette question : le modèle "water bag" (sous-ensemble de conditions initiales de l'équation de VLASOV) n'admet que les deux pôles de LANDAU, et son comportement est strictement adiabatique. Ceci suggère que la déviation à la loi d'adiabaticité va être liée à la présence de ces pôles autres que ceux de LANDAU. C'est ce problème que nous nous proposons de résoudre.

3. ETUDE DE L'INVARIANT ADIABATIQUE P_n^{-3} . INFLUENCE DES CONDITIONS INITIALES.

3.1. Variation de l'invariant adiabatique.

Nous considérons le plasma maxwellien, que nous perturbons initialement sous la forme

$$f(x, v, t=0) = n_0 (1 + \alpha \cos kx) F_0(v) \quad (65)$$

où $F_0(v)$ désigne la distribution de MAXWELL

$$F_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_T} \exp \left[-\frac{v^2}{2v_T^2} \right]$$

k est suffisamment petit pour que l'amortissement LANDAU soit négligeable.

Ces conditions initiales périodiques (nous excitons une onde stationnaire) montrent que n reste au cours du temps une fonction périodique paire, ce qui implique pour u, d'après l'équation de conservation des particules (10) d'être une fonction périodique impaire, et donc d'être toujours nulle au point zéro. Cette considération permet de simplifier le calcul de la pression que nous déterminerons toujours au point $x = 0$ par la formule

$$P(x=0, t) = m \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(0, v, t) dv$$

En ce point, l'invariant Pn^{-3} a donc pour valeur initiale

$$Pn^{-3}(x=0, t=0) = m n_0^{-2} v_T^2 (1 + \alpha)^{-2}$$

Au bout d'un certain temps, on pourra admettre que tous les pôles autres que ceux de LANDAU ont été amortis. Nous pouvons alors nous attendre à ce que la valeur de $Pn^{-3}(x=0, t)$ soit alors $m n_0^{-2} v_T^2$ et ne varie plus. Pour vérifier cette idée, nous réalisons une "expérience" numérique en simulant l'équation de VLASOV non linéaire par la méthode de FOURIER-HERMITE.

La condition initiale (65) peut encore s'écrire

$$f(x, v, t=0) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi} v_T} \left[1 + \frac{\alpha}{2} \exp(ikx) + \frac{\alpha}{2} \exp(-ikx) \right] H_0 \left(\frac{v}{v_T} \right) \exp \left(\frac{-v^2}{2v_T^2} \right)$$

$$\text{soit } a_{00}(0) = \frac{n_0}{v_T} \quad a_{10}(0) = \frac{n_0}{v_T} \frac{\alpha}{2} \quad a_{-10}(0) = \frac{n_0}{v_T} \frac{\alpha}{2} \quad (66)$$

Les autres fonctions $a_{rs}(0)$ sont nulles.

Nous résolvons le système (64) avec les conditions initiales (66) par une méthode de RUNGE-KUTTA-GILL à quatre approximations. A chaque étape du calcul, nous calculons $n(x=0,t)$ et $P(x=0,t)$, soit

$$\begin{aligned} n(x=0,t) &= v_T \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{r0} \\ P(x=0,t) &= m v_T^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} v_T (a_{r0} + 2a_{r2}) \end{aligned} \tag{67}$$

La figure (19) montre l'invariant Pn^{-3} en fonction du temps au point $x = 0$, pour $\alpha = 0,003$ et kD compris entre 0,03 et 0,10, avec 5 composantes de FOURIER et 30 composantes d'HERMITE.

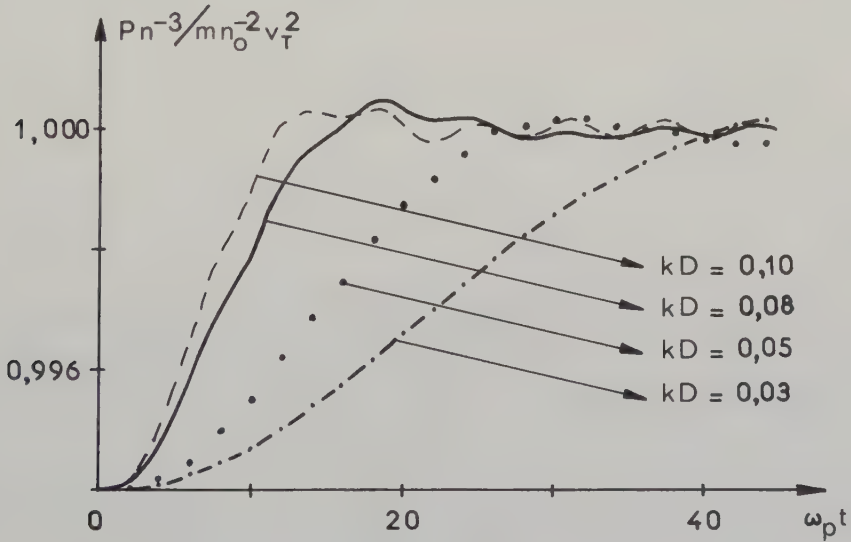


Figure 19

A l'instant initial, la courbe $Pn^{-3}(t)$ possède une tangente horizontale,

comme le prévoit le modèle hydrodynamique (en effet, au point choisi $x = 0$, on a $d/dt = \partial/\partial t = 0$). Nous constatons que P_n^{-3} garde sa valeur initiale d'autant plus longtemps que k est plus petit.

Le modèle hydrodynamique est cependant vite pris en défaut : l'invariant P_n^{-3} effectue un saut non adiabatique, d'amplitude constante quel que soit k jusqu'à la valeur $m_0^{-2} v_T^2$ autour de laquelle il oscille avec une amplitude très petite. La durée du saut est approximativement proportionnelle à k^{-1} , de même que l'inverse du taux d'amortissement des pôles au-delà des deux pôles de LANDAU. C'est ce que le calcul analytique va confirmer.

3.2. Calcul linéarisé de P_n^{-3} .

Nous partons de l'équation de VLASOV linéarisée, qui, pour le mode k s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} - ikv f_1 + \frac{en_0}{m} E_1 \frac{dF_0}{dv} &= 0 \\ -ik E_1 &= \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(k, v, t) dv \end{aligned}$$

$F_0(v)$ représente la distribution à l'équilibre (une maxwellienne). $f_1(k, v, t)$ est la fonction perturbée pour le mode k . Comme nous nous intéressons à un problème de conditions initiales, nous utilisons la transformation de LAPLACE, définie par la relation

$$f_1(k, v, s) = \int_0^{\infty} f_1(k, v, t) \exp(-st) dt$$

Le système de VLASOV-POISSON devient

$$(s - ikv) f_1(k, v, s) + \frac{en_0}{m} E_1(k, s) \frac{dF_0}{dv} = f_1(k, v, t=0)$$

$$- ik E_1(k, s) = \frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(k, v, s) dv$$

En éliminant le champ électrique, nous obtenons

$$f_1(k, v, s) = \frac{f_1(k, v, t=0)}{s-ikv} - i \frac{\omega_p^2}{k} \frac{1}{\epsilon(k, s)} \frac{dF_0/dv}{s-ikv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(k, v, t=0)}{s-ikv} dv$$

où $\epsilon(k, s)$ est la constante diélectrique du plasma définie par (3).

A partir de cette relation, nous pouvons calculer la transformée de LAPLACE de la densité et de la pression, soit, au 1er ordre

$$n_1(k, s) = \frac{1}{\epsilon(k, s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(k, v, t=0)}{s-ikv} dv$$

$$P_1(k, s) = \int_{-\infty}^{\infty} m \frac{v^2 f_1(k, v, 0)}{s-ikv} dv - i \frac{\omega_p^2}{k} n_1(k, s) \int_{-\infty}^{\infty} m \frac{v^2 dF_0/dv}{s-ikv} dv$$

Les fonctions $F_0(v)$ et $f_1(k, v, 0)$ font intervenir des quantités du type $\exp(-x^2)$. Il est alors commode d'introduire la fonction $Z(z)$ de FRIED et CONTE /61/ définie par

$$Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{x - z} dx & \text{pour } \text{Im}(z) > 0 \\ \text{prolongement analytique} & \text{pour } \text{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

Cette fonction possède l'importante propriété d'être analytique dans tout le plan complexe. Il vient

$$n_1(K, S) = -i \frac{n_0 \alpha}{2\sqrt{2}K \omega_p} \frac{Z(iS/K\sqrt{2})}{\epsilon(K, S)}$$

$$P_1(K, S) = \frac{mn_0 \alpha v_T^2}{\sqrt{2}K \omega_p} \left(\frac{S}{K\sqrt{2}} + i \frac{S^2}{2K^2} Z(iS/K\sqrt{2}) \right) + i \frac{mn_0 \alpha v_T^2}{2\sqrt{2}K^3 \omega_p} \left(1 - \frac{S^2}{K^2} - i \frac{S^3}{K^3\sqrt{2}} Z(iS/K\sqrt{2}) \right) \frac{Z(iS/K\sqrt{2})}{\epsilon(K, S)}$$

où K et S sont des grandeurs sans dimension définies à partir de k et s par

$$K = k v_T / \omega_p \quad S = s / \omega_p$$

La constante diélectrique s'exprime alors par la relation

$$\epsilon(K, S) = 1 + \frac{1}{K^2} + i \frac{S}{K^3\sqrt{2}} Z(iS/K\sqrt{2}) \quad (68)$$

Pour obtenir le comportement au cours du temps de la densité et de la pression, nous utilisons le théorème d'inversion de MELLIN-FOURIER

$$n_1(K, T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \omega_p n_1(K, S) \exp(ST) dS$$

(T représente le temps en unités ω_p^{-1}). L'intégration est effectuée dans le plan complexe sur le contour (C) de BROMWICH-WAGNER. Ce contour est une ligne verticale située à droite de toutes les singularités de l'intégrande (voir figure 20). Pour faire le calcul, nous appliquons la méthode des résidus, en déplaçant le contour (C) à gauche des pôles de $n_1(K, S)$. Appelons s_j ces pôles.

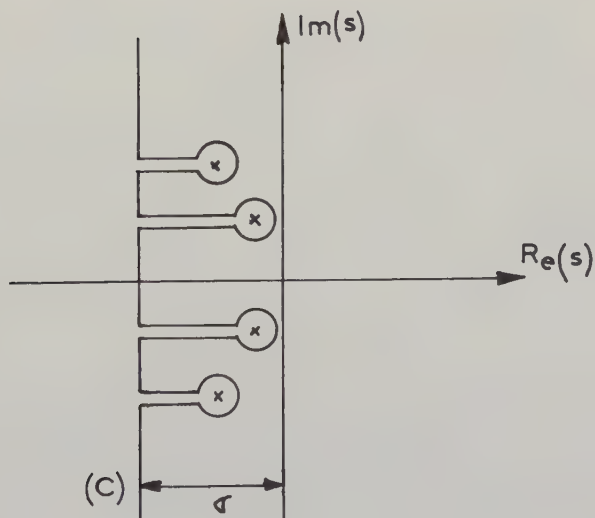
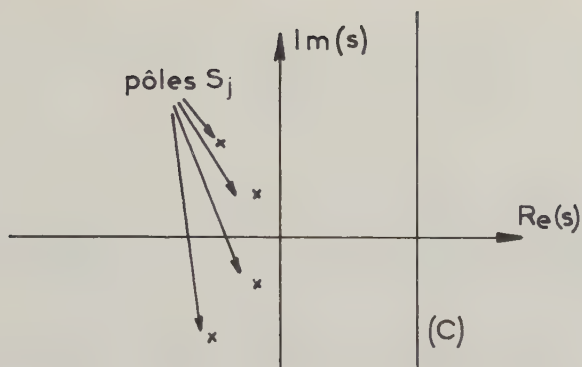


Figure 20

L'intégrale devient

$$n_1(K, T) = \omega_p \sum_j \text{Rés}_{S_j}(n_1) \exp(S_j T) + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\sigma-i\infty}^{-\sigma+i\infty} \omega_p n_1(K, S) \exp(ST) dS$$

L'intégrale du deuxième membre tend vers zéro, au moins aussi rapidement que $\exp(-\sigma T)$. Nous faisons alors tendre σ vers l'infini, ce qui nous donne $n_1(K, T)$ pour T strictement positif.

Les seuls pôles S_j de la densité et de la pression sont les racines de l'équation de dispersion $\epsilon(K, S_j) = 0$, puisque Z est une fonction holomorphe. Nous obtenons, en appliquant le théorème des résidus

$$n_1(K, T) = -i \frac{n_0 \alpha}{2\sqrt{2} K} \sum_j (\partial \epsilon / \partial S)_{S=S_j}^{-1} Z(iS_j / K\sqrt{2}) \exp(S_j T)$$

$$P_1(K, T) = i \frac{mn_0 \alpha v_T^2}{2\sqrt{2} K^3} \sum_j \frac{(1 - S_j^2 / K^2 - i S_j^3 / K^3 \sqrt{2}) Z(iS_j / \sqrt{2} K)}{(\partial \epsilon / \partial S)_{S=S_j}} Z(iS_j / K\sqrt{2}) \exp(S_j T)$$

Dans ces formules, $Z(iS_j / K\sqrt{2})$ est calculé directement en utilisant la formule (68) avec $\epsilon = 0$. Pour calculer $\partial \epsilon / \partial S$, nous remarquons que $Z'(z) = -2(1 + zZ)$, ce qui donne

$$\left(\frac{\partial \epsilon}{\partial S} \right)_{S=S_j} = - \frac{1 + K^2 + S_j^2}{K^2 S_j}$$

Nous obtenons finalement

$$n_1(K, T) = - \frac{n_0 \alpha}{2} \sum_j \frac{K^2 (K^2 + 1)}{1 + K^2 + S_j^2} \exp(S_j T)$$

$$P_1(K, T) = \frac{mn_0 \alpha v_T^2}{2} \sum_j \frac{(K^2 + 1) (1 + S_j^2)}{1 + K^2 + S_j^2} \exp(S_j T)$$

Pour calculer l'invariant $Pn^{-3}(x=0, T)$ nous écrivons au premier ordre

$$Pn^{-3} = (P_0 + P_1) (n_0 + n_1)^{-3} = P_0 n_0^{-3} + P_1 n_0^{-3} - 3 n_0^{-4} n_1 P_0$$

$$\text{avec } P_0 = mn_0 v_T^2$$

De plus, au point $x = 0$, on a $P_1(x=0, T) = 2 P_1(K, T)$

$$n_1(x=0, T) = 2 n_1(K, T)$$

d'où l'invariant $Pn^{-3}(x=0, T)$

$$Pn^{-3}(x=0, T) = mn_0^{-2} v_T^2 \left(1 + \alpha \sum_j \frac{(1+K^2) (1+3K^2+S_j^2)}{1+K^2+S_j^2} \exp(S_j T) \right) \quad (69)$$

Les deux pôles $\pm S_j$ de LANDAU, solutions de (68), sont donnés par

$$-S_j^2 = 1 + 3K^2 + 6K^4 + \dots$$

La contribution de ces pôles à Pn^{-3} est de l'ordre de αK^2 . Ils ne contribuent donc pas au saut non adiabatique, et sont uniquement à l'origine de la fluctuation de Pn^{-3} autour de la valeur $mn_0^{-2} v_T^2$.

Les pôles autres que ceux de LANDAU sont calculés en posant $\theta = iS/K\sqrt{2}$. Nous avons alors à résoudre

$$1 + \frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^2} \theta Z(\theta) = 0$$

Cette équation peut se simplifier en remarquant que

$$Z'(\theta) = -2 (1 + \theta Z(\theta))$$

Le calcul des pôles se ramène ainsi à la résolution numérique de

$$Z'(\theta) = 2K^2$$

Nous avons calculé numériquement 32 pôles, en plus des 2 pôles principaux de LANDAU. Ils sont portés sur la figure 21 pour $K = 0,1$. Nous pouvons constater que 16 pôles sont dans le demi-plan $\text{Im}(S) > 0$; les 16 autres sont dans le demi-plan $\text{Im}(S) < 0$.

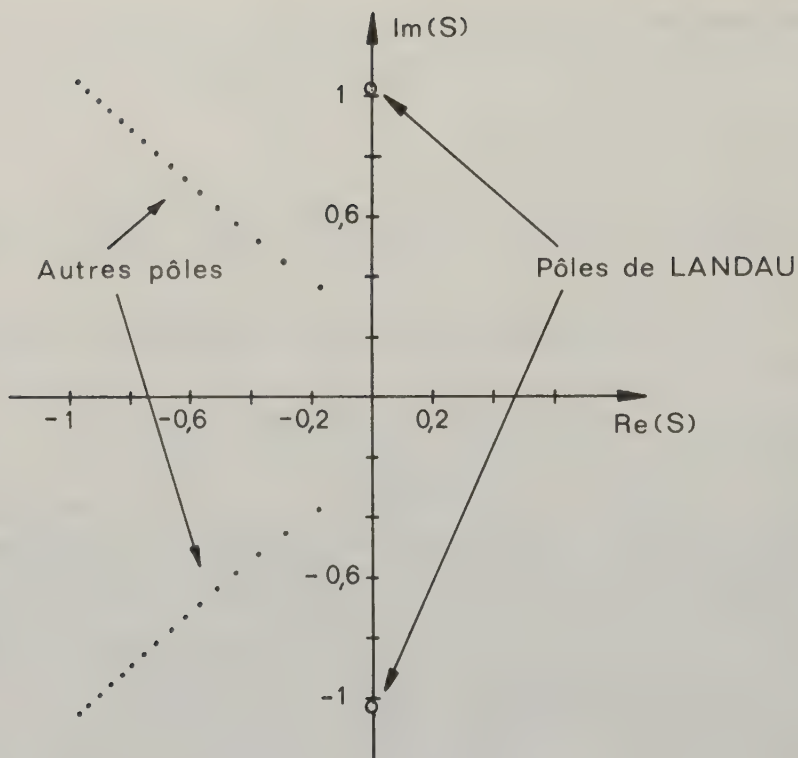


Figure 21

Puis, à partir de (69) nous avons calculé la fonction $Pn^{-3}(T)$. Les résultats sont représentés sur la figure (22), pour $\alpha = 0,003$ et $K = kD = 0,1$. Sur cette figure, nous avons aussi porté la courbe $Pn^{-3}(T)$ issue de l'expérience numérique (trait plein).

A partir d'un temps qui dépend du nombre de pôles N , l'accord théorie - "expérience numérique" est excellent. Nous constatons, que pour T petit, il faut beaucoup de pôles pour représenter correctement Pn^{-3} : la convergence est très lente. De plus, pour $T = 0$, la série (69) ne converge pas. En effet, comme nous l'avons vu, la méthode des résidus ne convient pas à $T = 0$.

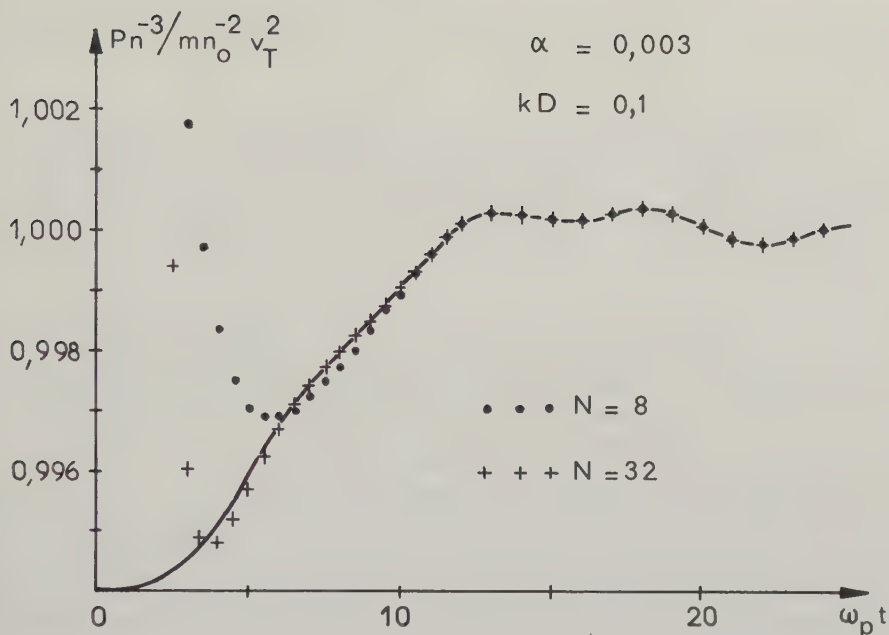


Figure 22

Sur ce problème particulier, nous retrouvons le phénomène mis en évidence par DENAVIT /9/ : en partant d'une distribution de MAXWELL, il est difficile de représenter correctement $f(x,v,t)$ pour t petit. Nous pouvons alors remarquer qu'un modèle "water bag" avec M contours ne donnerait pas ces difficultés. A condition de prendre M assez grand pour représenter correctement les conditions initiales, la densité et la pression seraient bien représentées à tous les temps, y compris l'instant initial. Les $2M$ modes propres du "water bag" décrivent, en effet, complètement le problème mathématique. (Sauf bien entendu pour des temps très longs).

En conclusion, les pôles autres que ceux de LANDAU, sont bien responsables du saut non adiabatique.

3.3. Conditions initiales ne conduisant pas au saut non adiabatique.

Après disparition des contributions attachées aux pôles autres que ceux de LANDAU, l'invariant adiabatique obtenu est celui qui correspond à l'état homogène avant toute perturbation. Cela nous conduit à considérer des conditions initiales telles que

$$f(x, v, t=0) = n_0 (1 + \alpha \cos kx) F_0(v/v_0(x))$$

avec une vitesse thermique locale fonction de la position, et telle que

$$v_0(x) = v_T (1 + \alpha \cos kx)$$

Avec ces conditions initiales un peu particulières, on a

$$P n^{-3}(x, t=0) = m n_0^{-2} v_T^2 = C^{te}$$

c'est-à-dire que l'invariant $P n^{-3}$ à l'instant initial n'est pas affecté par la perturbation.

Nous appelons de telles conditions initiales, "conditions initiales adiabatiques".

Nous simulons ces conditions initiales sur ordinateur par la méthode FOURIER-HERMITE. Ces conditions sont telles que

$$P = m n_0^{-2} v_T^2 n^3$$

ce qui, d'après (67) nous donne

$$\sum_r v_T (a_{r0}(0) + 2 a_{r2}(0)) = n_0 (1 + \alpha \cos kx)^3$$

Par identification, nous obtenons, outre les conditions initiales (66),

$$a_{02}(0) = \frac{n_0}{v_T} \frac{3\alpha^2}{4} \qquad a_{\pm 1,2}(0) = \frac{n_0}{v_T} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{3\alpha^2}{8}\right)$$

$$a_{\pm 2,2}(0) = \frac{n_0}{v_T} \frac{3\alpha^2}{8} \quad a_{\pm 3,2}(0) = \frac{n_0}{v_T} \frac{\alpha^3}{16} \quad (70)$$

les autres coefficients $a_{rs}(0)$ étant nuls. Nous résolvons ensuite le système (64). Les résultats sont représentés sur la figure 23, pour $kD = 0,1$ et $\alpha = 0,003$. Nous constatons alors, à part une fluctuation d'ordre $\alpha k^2 D^2$, que l'invariance de Pn^{-3} est acquise.

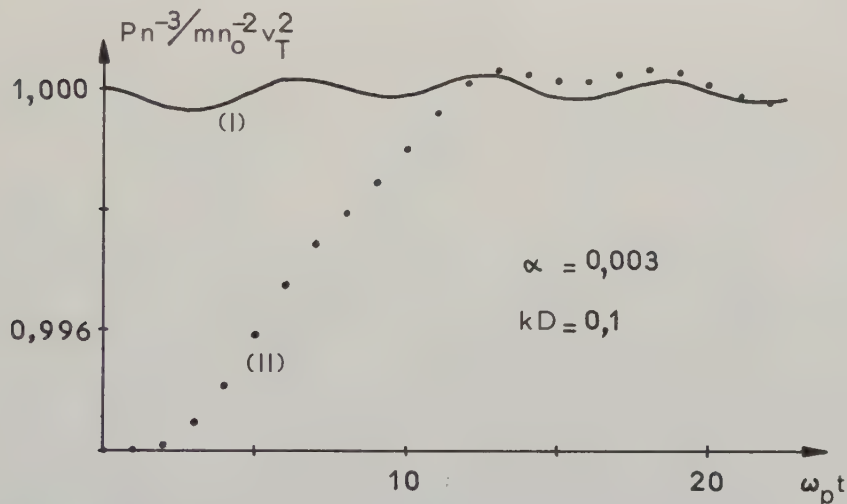


Figure 23 (I) : Conditions initiales "adiabatiques"
(II) : Conditions initiales non "adiabatiques"

3.4. Possibilité d'associer un "water bag" aux conditions initiales adiabatiques.

Pour de telles conditions initiales, nous venons de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial t} (Pn^{-3}) \sim 0$$

A ces conditions initiales adiabatiques, nous pouvons associer un

"water bag" tel que

$$v^{\pm}(x, t=0) = \pm \sqrt{3} v_T (1 + \alpha \cos kx) \quad (71)$$

$$A = n_0 / 2\sqrt{3} v_T$$

Ce "water bag" conservera strictement l'invariant Pn^{-3} alors que la conservation de Pn^{-3} dans le modèle FOURIER-HERMITE n'est qu'approchée.

Nous pouvons alors nous demander comment ce "water bag" associé va traiter les effets non linéaires. Nous revenons alors à des grandeurs plus intéressantes que Pn^{-3} (qui a servi de base de comparaison des différents modèles) et en particulier au champ électrique.

Nous déterminons alors numériquement le 2^{ème} et le 3^{ème} harmoniques du champ électrique, à l'aide de trois modèles.

Modèle A : FOURIER-HERMITE avec conditions initiales non adiabatiques (66)

Modèle B : FOURIER-HERMITE avec conditions initiales adiabatiques (70)

Modèle C : "Water bag" associé aux conditions initiales adiabatiques (71)

Dans les trois cas, nous prenons $\alpha = 0,003$ et $kD = 0,08$. Pour les modèles A et B, nous considérons cinq composantes de FOURIER et trente composantes d'HERMITE (ce qui, compte tenu des composantes de FOURIER d'ordre négatif, correspond à 300 équations différentielles à résoudre). Pour le modèle C, nous considérons pour chaque fonction v^+ ou v^- , cinq composantes de FOURIER, ce qui nous conduit à 20 équations.

Sur la figure 24, nous avons porté les 2^{ème} et 3^{ème} harmoniques du champ électrique au cours du temps /62/. Les effets thermiques pour les modèles A et B, par comparaison avec le plasma froid, sont

différents. Par contre, l'accord est excellent entre les modèles B et C (même pour le 3^{ème} harmonique pour lequel $3kD = 0,24$). Cela s'explique bien par le fait que les conditions initiales "adiabatiques" n'excitent pas les pôles autres que ceux de LANDAU. Les effets non linéaires sont ainsi uniquement dus au couplage des deux pôles de LANDAU - phénomène que le "water bag" décrit très bien.

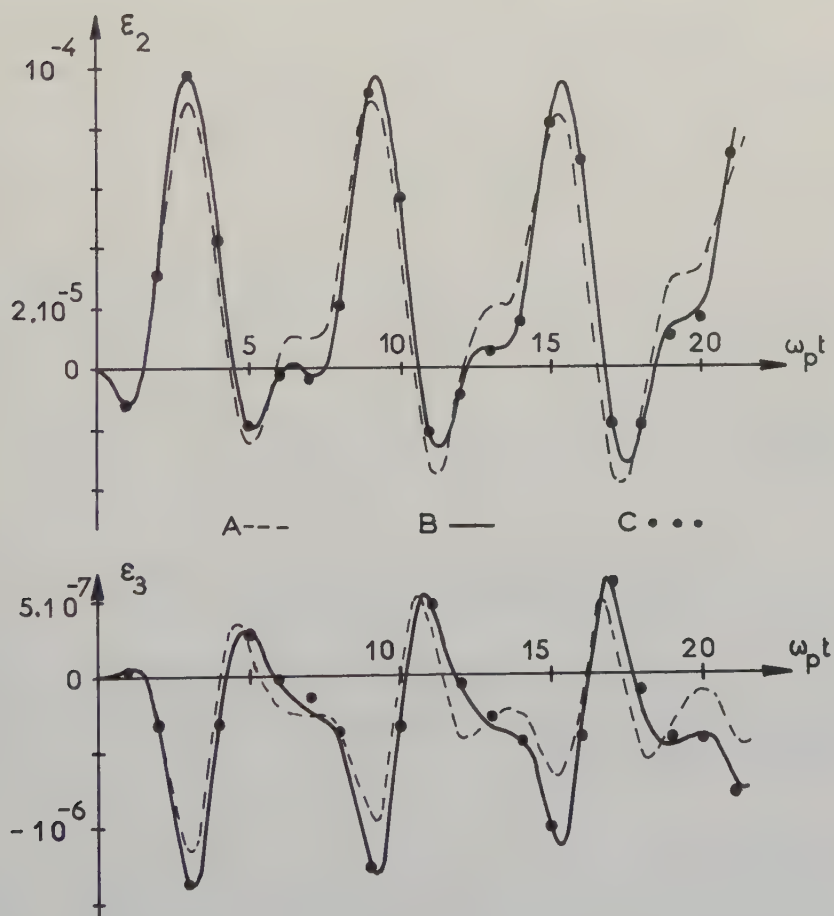


Figure 24

4. CONCLUSION.

L'équation de VLASOV ne peut être remplacée par un modèle du type hydrodynamique "water bag" (c'est-à-dire par les équations n'impliquant que les deux premiers moments de la fonction de distribution) que pour les grandes longueurs d'onde et les faibles non linéarités.

Bien qu'il y ait une analogie formelle entre le "water bag" à un contour, et l'hydrodynamique, il convient de préférer systématiquement le modèle "water bag" pour deux raisons :

- le "water bag" est strictement équivalent au modèle VLASOV pour les conditions initiales du type $f = A$.

- pour des conditions initiales adiabatiques, le "water bag" associé est une excellente approximation du modèle VLASOV. Il permet de traiter correctement non seulement les variations thermiques de la fréquence, mais également les effets non linéaires (apparition d'harmoniques, dérive de fréquence...) dont le calcul analytique peut être effectué grâce à la simplicité de ce modèle. Nous avons vu, à ce sujet, l'intérêt de la méthode lagrangienne (paragraphe 1).

Nous verrons qu'il en est de même pour le calcul des dérivées de fréquences dues à la présence d'une inhomogénéité dans le plasma.

En conclusion, le modèle "water bag" à un contour est le modèle à utiliser pour l'étude des oscillations faiblement non linéaires à grandes longueurs d'onde.

CHAPITRE V

LE MODELE "WATER BAG" ET LES PLASMAS INHOMOGENES

Dans les deux derniers chapitres, nous n'avons envisagé que des plasmas homogènes, c'est-à-dire des plasmas de densités électronique et ionique constantes à l'équilibre.

L'étude des plasmas inhomogènes est intéressante à deux points de vue : d'une part, aucun plasma dans la nature ne possède une densité de particules rigoureusement constante. La propagation des oscillations électrostatiques doit s'en trouver modifiée. D'autre part, des structures stationnaires fortement inhomogènes semblent être l'aboutissement de processus dynamiques non linéaires. La recherche de critères de stabilité pour des équilibres inhomogènes est donc nécessaire.

A la base de l'étude générale de ces plasmas, se trouve l'équation intégrale (6), à noyau compliqué, que nous avons signalée au premier chapitre. Mais à part des méthodes numériques d'intégration /63/, cette équation est difficilement utilisable. Nous pouvons alors signaler la méthode de résolution numérique directe de l'équation de VLASOV

linéarisée par le développement de FOURIER-HERMITE /13/. Nous y revenons plus en détail, car cette méthode constitue en fait, une expérience numérique qui permet de tester les diverses théories, et d'en contrôler les hypothèses.

Enfin, de nombreux auteurs ont essayé d'utiliser des approches simplifiées. Deux méthodes ont, en gros, été utilisées :

1) le modèle hydrodynamique /64/ /65/

2) l'approximation des grandes longueurs d'onde, qui consiste à supposer la longueur d'onde des perturbations, et la longueur caractéristique de l'inhomogénéité, beaucoup plus grandes que la longueur de DEBYE /66/ /67/.

Une étude comparative de ces diverses approches a été effectuée récemment par MIURA et BARSTON /68/.

Malheureusement, les hypothèses de ces diverses approches se révèlent délicates et pas toujours justifiées (modèle hydrodynamique). Aussi, le modèle "water bag" avec ses bases rigoureuses peut-il être d'un grand intérêt dans le traitement des plasmas inhomogènes.

Dans ce chapitre, nous envisagerons d'abord les équations générales du "water bag" en milieu inhomogène. Puis nous verrons une application de ces équations au traitement des ondes électrostatiques longitudinales, d'abord en milieu stable (à l'aide d'un modèle à un contour), puis en présence d'une instabilité double faisceau.

Enfin, dans un dernier paragraphe, nous rechercherons des critères de stabilité.

1. APPLICATION DU MODELE "WATER BAG" A L'ETUDE DES PLASMAS INHOMOGENES.

1.1. Etat d'équilibre - Onde B.G.K.

Reprenons les équations générales

$$\frac{\partial v_j^\pm}{\partial t} + v_j^\pm \frac{\partial v_j^\pm}{\partial x} = - \frac{e}{m} E \quad (72)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j (v_j^+ - v_j^-) - \frac{en_i(x)}{\epsilon_0} \quad (73)$$

dans lesquelles n_i est maintenant fonction de la position. A l'équilibre, nous supposons des contours symétriques

$$v_j^\pm = \pm a_j(x)$$

$$E = E^{(0)}(x)$$

L'équation (72) nous donne

$$a_j \frac{da_j}{dx} = - \frac{e}{m} E^{(0)}$$

Or, le champ $E^{(0)}$ dérive du potentiel $\phi^{(0)}$. Par intégration, il vient

$$\frac{1}{2} m a_j^2 + e \phi^{(0)} = U_j = C^{te}$$

Les trajectoires sont à énergie constante. Ce résultat est en fait très général : la fonction de distribution $f_0(x, v)$, à l'équilibre, n'est fonction pour un problème unidimensionnel que de l'énergie des particules.

L'équation de POISSON (73) peut encore s'écrire

$$\frac{d^2 E^{(0)}}{dx^2} = - \frac{e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M 2A_j \frac{da_j}{dx} - \frac{e}{\epsilon_0} \frac{dn_i}{dx}$$

soit

$$\frac{d^2 E^{(0)}}{dx^2} - k^2(x) E^{(0)} = - \frac{e}{\epsilon_0} \frac{dn_i}{dx} \quad (74)$$

avec

$$k^2(x) = \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^M \frac{2A_j}{a_j(x)} \quad (75)$$

Cette équation est très importante. Nous avons vu dans le chapitre 2, que l'aboutissement ultime de l'instabilité double-faisceau dans un plasma initialement homogène était une distribution ne dépendant que de l'énergie, mais présentant une périodicité spatiale. Ces solutions périodiques doivent en fait être solutions de l'équation (74) avec n_i constant. Elles ont été envisagées pour la première fois par BERNSTEIN, GREENE et KRUSKAL /36/ d'où le nom d'ondes B.G.K. Le problème de l'existence de ces solutions peut être abordé à partir de l'équation (74) sans second membre. Un signe positif (négatif) pour $k^2(x)$ signifie que la fonction $E^{(0)}$ vue de l'axe $E^{(0)} = 0$ est convexe (concave) au point x considéré. Elle a donc un comportement "exponentiel" en ce point si $k^2(x)$ est positif et "sinusoïdal" si $k^2(x)$ est négatif. En particulier, si $k^2(x)$ est positif partout, les ondes B.G.K. ne peuvent exister /69/. Bien entendu, si la densité ionique n'est pas constante, il existe une plus grande richesse de solutions. Tout dépend de la forme de la fonction $n_i(x)$.

1.2. Equations linéarisées d'une petite perturbation.

Que ce soit pour la stabilité des solutions B.G.K., ou pour l'étude de la propagation d'une perturbation, le principal problème à résoudre est la recherche des fréquences propres ω du plasma. Nous supposons donc pour les diverses grandeurs un comportement temporel en $\exp(i\omega t)$, et nous linéarisons ces grandeurs autour de l'équilibre, soit

$$v_j^{\pm}(x,t) = \pm a_j(x) + w_j^{\pm}(x) \exp(i\omega t)$$

$$E(x,t) = E^{(0)}(x) + E^{(1)}(x) \exp(i\omega t)$$

Les équations générales (72) et (73) s'écrivent

$$i\omega w_j^+ + \frac{d}{dx}(w_j^+ a_j) = \frac{e}{m} E^{(1)}$$

$$i\omega w_j^- - \frac{d}{dx}(w_j^- a_j) = \frac{e}{m} E^{(1)}$$

$$\frac{dE^{(1)}}{dx} = \frac{e}{\epsilon_0} \sum_{j=1}^M A_j (w_j^+ - w_j^-)$$

Nous faisons la somme et la différence des deux premières équations. Puis nous éliminons $w_j^+ + w_j^-$ entre les deux nouvelles équations ainsi formées. Le calcul donne

$$\omega^2 (w_j^+ - w_j^-) = \frac{2e}{m} \frac{d}{dx} (a_j E^{(1)}) - \frac{d}{dx} \left(a_j \frac{d}{dx} (a_j (w_j^+ - w_j^-)) \right)$$

Il est intéressant d'introduire les champs partiels $E_j^{(1)}$ créés par chaque "bag" j , et obéissant à l'équation de POISSON

$$\frac{dE_j^{(1)}}{dx} = \frac{e}{\epsilon_0} A_j (w_j^+ - w_j^-)$$

En exprimant alors $w_j^+ - w_j^-$ en fonction du champ partiel $E_j^{(1)}$ et en intégrant par rapport à x il vient

$$\omega^2 E_j^{(1)} = \omega_j^2(x) E^{(1)} - a_j \frac{d}{dx} \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right) \quad (76)$$

Dans cette équation, $\omega_j^2(x)$ représente la fréquence plasma locale du "bag" j , définie par

$$\omega_j^2(x) = (e^2/\epsilon_0 m) \cdot 2A_j a_j(x)$$

L'utilisation du "water bag" permet ainsi le remplacement de l'équation intégrale des modes propres d'un plasma inhomogène par un système de M équations différentielles, couplées entre elles par l'intermédiaire de leur relation

$$E^{(1)} = \sum_{j=1}^M E_j^{(1)} \quad (77)$$

2. "WATER BAG" A UN CONTOUR : ONDES ELECTROSTATIQUES DANS UN PLASMA INHOMOGENE /70/.

Nous avons vu, à propos de l'étude des phénomènes non linéaires, l'intérêt du modèle à un "bag" : c'est un modèle rigoureux, le seul prix à payer étant évidemment de considérer des conditions initiales un peu particulières.

2.1. Etat stationnaire.

Pour ce modèle, la fonction $k^2(x)$ étant positive, il ne peut exister de solutions périodiques pour les électrons avec une densité homogène d'ions. Si nous voulons étudier un état stationnaire périodique dans l'espace, il nous faudra considérer une distribution ionique inhomogène. Pour simplifier, nous supposons cette distribution telle que le contour stationnaire soit défini par

$$a(x) = a_0 (1 + \epsilon \cos Kx)$$

où K représente le nombre d'onde de l'inhomogénéité et ϵ le taux d'inhomogénéité. La densité électronique et la fréquence plasma locale sont

$$n(x) = 2a_0 A (1 + \epsilon \cos Kx) = n_0 (1 + \epsilon \cos Kx)$$

$$\omega_p^2(x) = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m} (1 + \epsilon \cos Kx) = \omega_0^2 (1 + \epsilon \cos Kx)$$

n_0 et ω_0 désignant respectivement la densité électronique moyenne, et la fréquence plasma correspondant à cette densité.

2.2. Equation linéarisée d'une perturbation.

Le système (76) pour un seul contour, s'écrit très simplement sous la forme

$$\omega^2 E^{(1)} = \omega_p^2 E^{(1)} - a \frac{d}{dx} \left(a \frac{d}{dx} E^{(1)} \right) \quad (78)$$

Nous introduisons à la place de x la variable de LAGRANGE θ , définie par

$$\theta = \int_0^x \frac{dx'}{a(x')} \quad (79)$$

et qui correspond au temps mis par une particule du contour pour se déplacer du point d'abscisse 0 au point x . Avec ce changement de variable, (78) devient

$$\frac{d^2 E^{(1)}(\theta)}{d\theta^2} + (\omega^2 - \omega_p^2(\theta)) E^{(1)}(\theta) = 0 \quad (80)$$

Il est intéressant de noter que (80) est similaire à l'équation obtenue par JACKSON et RAETHER /66/ à partir de l'approximation des grandes longueurs d'onde, ou par WEISGLAS /64/ à partir d'un modèle hydrodynamique, soit

$$\frac{d^2 E^{(1)}(x)}{dx^2} + \frac{1}{3v_T^2} (\omega^2 - \omega_p^2(x)) E^{(1)}(x) = 0 \quad (81)$$

La différence importante vient de ce que la variable dans (81) est x et non θ . Mais si, comme JACKSON et RAETHER, nous choisissons une densité électronique telle que $\omega_p^2(x) = \omega_0^2(1 + \epsilon \cos Kx)$, cette densité écrite en variable θ devient

$$\omega_p^2(\theta) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \epsilon \cos Ka_0 \theta + \frac{\epsilon^2}{2} \cos 2Ka_0 \theta + O(\epsilon^3) \right) \quad (82)$$

En fait, le traitement de JACKSON et RAETHER revient à remplacer $a(x)$ par sa valeur moyenne a_0 , et θ par x/a_0 . Mais, comme le montre (82), ceci n'est valable qu'au premier ordre en ϵ .

En revanche, pour ce problème, le modèle "water bag" fournit une équation rigoureuse. Nous verrons même, qu'un très bel accord pourra être obtenu avec un traitement numérique complet de l'équation de VLASOV.

2.3. Equations matricielles pour les fréquences propres.

Le calcul effectif des ω peut être entrepris soit à partir de l'équation en x (78) soit à partir de l'équation en θ (80). La complication de ces deux équations est en fait la même. ω_p^2 étant donné explicitement en x , nous utiliserons plutôt l'équation (78).

2.3.1. Transformation de BLOCH - FLOQUET.

Cette équation est une équation différentielle du second ordre à coefficients périodiques. La théorie générale de ces équations [71] nous indique que la solution doit être de la forme

$$E^{(1)}(x) = \exp(\pm \lambda x) P_K(x)$$

où P_K est une fonction périodique de nombre d'onde K . La nécessité d'avoir

des fonctions bornées à l'infini, impose à λ d'être un nombre imaginaire pur. Nous posons alors $\lambda = ik_0$. En décomposant $P_K(x)$ en série de FOURIER, nous pouvons écrire la solution générale de l'équation (78) sous la forme

$$E^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n^{(1)} \exp i(k_0 + nK) x \quad (83)$$

L'équation (78) prend alors la forme d'une équation matricielle

$$(M) (E^{(1)}) = \omega^2 (E^{(1)}) \quad (84)$$

où $(E^{(1)})$ est une matrice colonne dont les éléments sont $E_n^{(1)}$. La matrice (M) est une matrice infinie, dont la partie centrale est donnée dans la table 1. (Avec n variant de -2 à $+2$). Les fréquences propres ω^2 sont justement les valeurs propres de la matrice (M) .

2.3.2. Méthode de calcul des fréquences propres.

D'après la relation de BLOCH-FLOQUET (83) nous voyons que les fréquences propres ω^2 vont dépendre de deux nombres d'onde différents: le nombre d'onde de l'inhomogénéité K , et k_0 . Le fait que k_0 ne soit pas fixé est une caractéristique d'un plasma infini où tous les nombres d'onde peuvent se propager. En revanche, pour un plasma fini, k_0 ne peut prendre que des valeurs qui sont déterminées par les conditions aux limites.

Si le plasma était homogène, les fréquences propres seraient données par

$$\omega^2 = \omega_0^2 + (k_0 + nK)^2 a_0^2$$

Dans le développement de BLOCH-FLOQUET, ces valeurs se retrouvent sur la diagonale principale de (M) lorsqu'on fait $\epsilon = 0$. Le caractère périodique de l'inhomogénéité introduit un couplage entre les différents nombres d'onde $k_0 + nK$ et conduit à une modification des fréquences propres.

$1+3(k_o-2K)^2 \cdot$ $(1+\epsilon^2/2)D^2$	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3(k_o-K) \cdot \right.$ $\left. (2k_o-3K)D^2 \right]$	$\frac{3}{4} \epsilon^2 k_o (k_o-K)D^2 \cdot$	0
$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3(k_o-2K) \cdot \right.$ $\left. (2k_o-3K)D^2 \right]$	$1+3(k_o-K)^2 \cdot$ $(1+\epsilon^2/2)D^2$	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3k_o \cdot \right.$ $\left. (2k_o-K)D^2 \right]$	$\frac{3}{4} \epsilon^2 k_o (k_o+K)D^2$
$\frac{3}{4} \epsilon^2 (k_o-2K) \cdot$ $(k_o-K)D^2$	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3(k_o-K) \cdot \right.$ $\left. (2k_o-K)D^2 \right]$	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3(k_o+K) \cdot \right.$ $\left. (2k_o+K)D^2 \right]$	$\frac{3}{4} \epsilon^2 (k_o+2K) \cdot$ $(k_o+K)D^2$
0	$\frac{3}{4} \epsilon^2 k_o (k_o-K)D^2$	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3k_o \cdot \right.$ $\left. (2k_o+K)D^2 \right]$	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3(k_o+2K) \cdot \right.$ $\left. (2k_o+3K)D^2 \right]$
0	0	$\frac{\epsilon}{2} \left[1+3(k_o+K) \cdot \right.$ $\left. (2k_o+3K)D^2 \right]$	$1+3(k_o+2K)^2 \cdot$ $(1+\epsilon^2/2)D^2$

TABLE 1 : Matrice (M). Les fréquences sont normalisées à ω_o . D est la distance de DEBYE
définie par $3D^2 = a_o^2 \omega_o^{-2}$

Pour de faibles valeurs de ϵ , les diagonales bordant la diagonale principale sont d'ordre ϵ , les suivantes sont d'ordre ϵ^2 . Par conséquent, il est possible de calculer analytiquement les modifications des fréquences, en puissances successives de ϵ , en prenant des matrices de plus en plus grandes (matrice 3x3 avec n variant de -1 à +1, matrice 5x5 avec n variant de -2 à +2 etc...).

Notre intérêt va plus précisément à l'évolution de la fréquence propre correspondant au terme central, soit $\omega_0^2 + k_0^2 a_0^2 = \omega_0^2 (1 + 3k_0^2 D^2)$. Nous pouvons calculer la variation de cette fréquence au second ordre en ϵ en prenant la matrice 3x3 au centre de (M). Posons alors

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + 3k_0^2 D^2 + \delta$$

où δ représente la variation de fréquence. En supposant $k_0^2 D^2$ et $K^2 D^2$ petits devant 1, ϵ petit devant $k_0^2 D^2$ et $K^2 D^2$, et en négligeant les termes d'ordre supérieur, nous avons à résoudre

$$\begin{vmatrix} 3K(K-2k_0)D^2 & \frac{\epsilon}{2} & 0 \\ \frac{\epsilon}{2} & -\delta & \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \frac{\epsilon}{2} & 3K(K+2k_0)D^2 \end{vmatrix} = 0$$

soit

$$9K^2(K^2 - 4k_0^2)D^4\delta + \frac{3}{4}\epsilon^2 K(K - 2k_0)D^2 + \frac{3}{4}\epsilon^2 K(K + 2k_0)D^2 = 0$$

Nous obtenons alors

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + 3k_0^2 D^2 - \frac{\epsilon^2}{6(K^2 - 4k_0^2)D^2} \quad (85)$$

Remarquons que ce traitement n'est plus valable si $K^2 = 4k_0^2$ soit $k_0 = K/2$. Ce cas doit être étudié séparément.

2.3.3. Résonance à 3 ondes dans un plasma périodique.

Lorsque $k_0 = K/2$, les fréquences (pour un plasma homogène) qui correspondent aux nombres d'onde $k_0 = K/2$ et $k_0 - K = -K/2$ sont égales. Nous considérons alors 3 ondes :

$$\text{onde n}^\circ 1 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{nombre d'onde} & k_1 = k_0 = K/2 \\ \text{fréquence} & \omega_1^2 = \omega_0^2 + k_0^2 a_0^2 = \omega_0^2 + \frac{K^2 a_0^2}{4} \end{array} \right.$$

onde n° 2 : onde stationnaire correspondant à l'équilibre inhomogène

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{nombre d'onde} & k_2 = K \\ \text{fréquence} & \omega_2^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{onde n}^\circ 3 \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{nombre d'onde} & k_3 = k_0 - K = -K/2 \\ \text{fréquence} & \omega_3^2 = \omega_0^2 + (k_0 - K)^2 a_0^2 = \omega_0^2 + \frac{K^2 a_0^2}{4} \end{array} \right.$$

Nous constatons que ces 3 modes satisfont aux relations de MANLEY-ROWE/72/

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$$

$$k_1 = k_2 + k_3$$

Il y a donc couplage résonant entre ces 3 modes. Pour calculer la modification de fréquence qui en résulte, pour de faibles valeurs de ϵ , nous n'avons à considérer que la matrice 2x2 constituée par les éléments entourés en pointillés sur la table 1. (avec $n = -1, 0$). Il nous faut résoudre explicitement

$$\begin{vmatrix} 1 + 3k_0^2 a_0^2 - \omega^2/\omega_0^2 & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & 1 + 3k_0^2 a_0^2 - \omega^2/\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (86)$$

$$\text{soit} \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + 3 k_0^2 D^2 \pm \frac{\epsilon}{2} \quad (87)$$

Nous obtenons deux solutions possibles. Il est intéressant de voir physiquement à quoi ces solutions correspondent.

Lorsque $k_0 = K/2$, nous sommes dans le cas d'un plasma borné, de longueur $L = 2\pi/K$. Les vecteurs propres correspondant à (86) sont respectivement

$$\text{— pour } \omega^2/\omega_0^2 = 1 + 3 k_0^2 D^2 + \epsilon/2$$

$$\begin{pmatrix} E^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^{(1)} \\ E_0^{(1)} \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à $E^{(1)}$ pair

$$\text{— pour } \omega^2/\omega_0^2 = 1 + 3 k_0^2 D^2 - \epsilon/2$$

$$\begin{pmatrix} E^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +E_0^{(1)} \\ -E_0^{(1)} \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à $E^{(1)}$ impair. Si, de plus, nous admettons que $E^{(1)}$ s'annule aux deux extrémités du plasma, il faut, que dans le premier cas ce plasma s'étende de $-L/2$ à $L/2$. Dans le deuxième cas ces limites doivent être 0 et L .

Sur la figure 25, nous avons représenté pour chaque cas, le profil de densité à l'équilibre, et le champ $E^{(1)}$. L représente la longueur d'onde de l'inhomogénéité, soit la longueur du plasma.

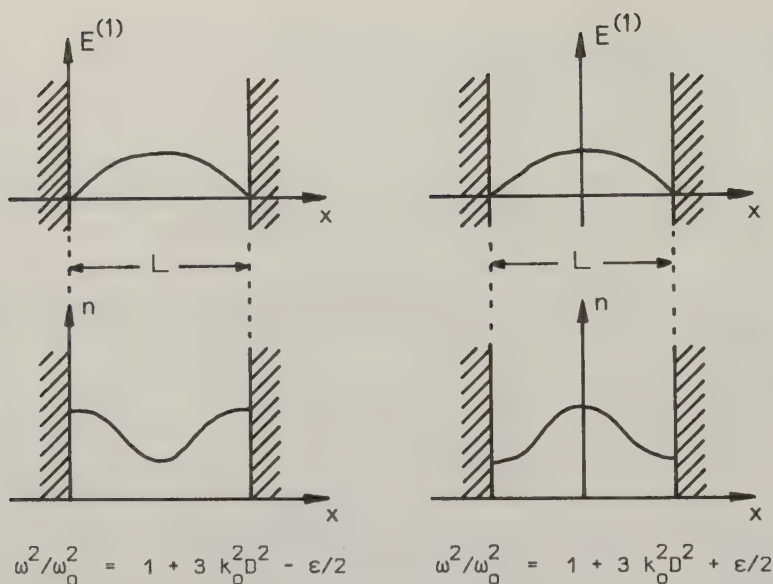


Figure 25

2.4. Résolution numérique des équations matricielles.

Les résultats précédents ont été obtenus pour de faibles valeurs du paramètre d'inhomogénéité. Pour des valeurs quelconques, nous devons avoir recours au calcul numérique.

2.4.1. Résultats numériques pour $k_0 = K/2$.

L'équation (87) est obtenue en ne considérant qu'une matrice 2×2 . Lorsque le degré d'inhomogénéité augmente, l'influence des autres modes devient importante. Nous avons étudié numériquement la convergence des résultats obtenus à partir de matrices de plus en plus grandes. La figure 26 montre les résultats pour $k_0 D = 0,05$ (donc $KD = 0,1$). Nous pouvons noter que (87) n'est valable que si ϵ est faible ($\epsilon < 0,01$). De plus, pour un taux d'inhomogénéité assez fort ($\epsilon \sim 0,3$), il nous faut considérer au moins des matrices 11×11 .

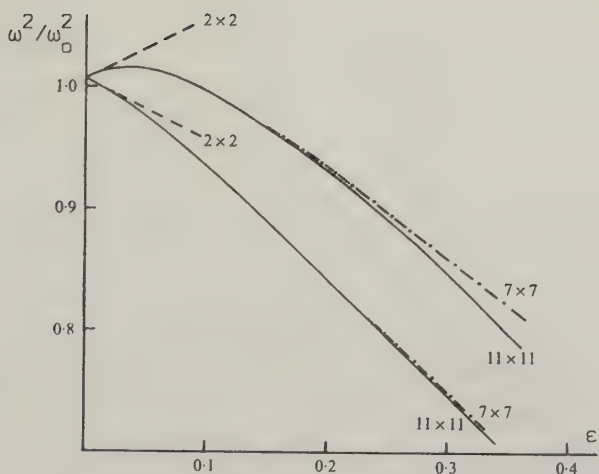


Figure 26

2.4.2. Structure de bandes dans la propagation.

La valeur $k_0 = K/2$ pour laquelle il existe deux valeurs de ω correspond à une discontinuité sur la courbe $\omega(k_0)$. Ce phénomène n'intervient pas uniquement pour $k_0 = K/2$, mais aussi pour $k_0 = mK/2$ où m est un entier. Pour toutes ces valeurs, nous avons deux fréquences possibles correspondant à une dégénérescence entre les ondes k_0 et $k_0 - mK$. Cette discontinuité de la fréquence correspond à l'existence de bandes de fréquences pour lesquelles il n'y a pas de propagation. Ce phénomène très général en physique des ondes dans les milieux périodiques a été discuté en détails par BRILLOUIN et PARODI /73/.

Pour obtenir ces bandes, nous avons porté sur la figure 27 les courbes donnant les fréquences pour $k_0 = mK/2$ en fonction de ϵ pour $m = 1, 2, 3$ etc... Plaçons-nous alors sur une droite $\epsilon = C^{te}$. A partir de la courbe obtenue pour $k_0 = 0$, nous avons une augmentation continue de la fréquence, jusqu'à ce que nous atteignons pour $k_0 = K/2$ la valeur correspondant à la branche inférieure de la figure 26. La fréquence subit

alors une discontinuité, puis croît à nouveau à partir de la valeur correspondant à la branche supérieure de la figure 26. Le même phénomène se reproduit pour $k_0 = 2K/2, 3K/2, 4K/2 \dots$

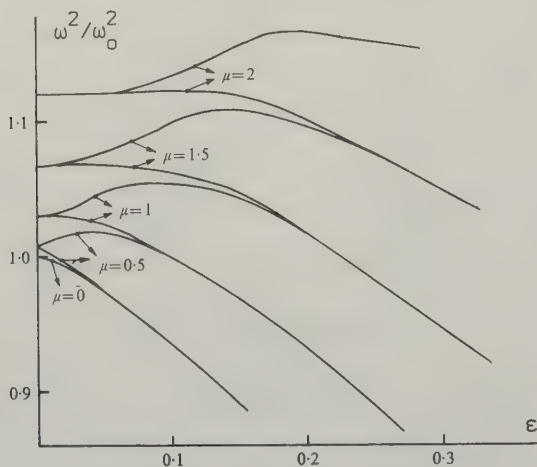


Figure 27 - μ représente le rapport k_0/K . ($\mu = m/2$).

Pour résumer ces résultats, nous portons sur la figure 28 la courbe $\omega(k_0)$ pour diverses valeurs de ϵ . La courbe en pointillés correspond à la relation de dispersion d'un plasma homogène. Nous pouvons constater pour $\epsilon = 0,2$ que le spectre de fréquence est pratiquement discret.

En effet, l'équation (80) en θ est une équation du type propagation d'une onde électromagnétique dans une cavité. Les valeurs de ω^2 choisies sont telles que la quantité $\omega^2 - \omega_p^2(\theta)$ est alternativement positive et négative; ceci correspond respectivement à la possibilité de propagation, ou à l'amortissement de l'onde. Si ϵ n'est pas petit, le coefficient d'amortissement est suffisamment grand pour que les zones de propagations soient en fait des cavités résonantes, où seul un spectre discret de fréquence est permis /74/.

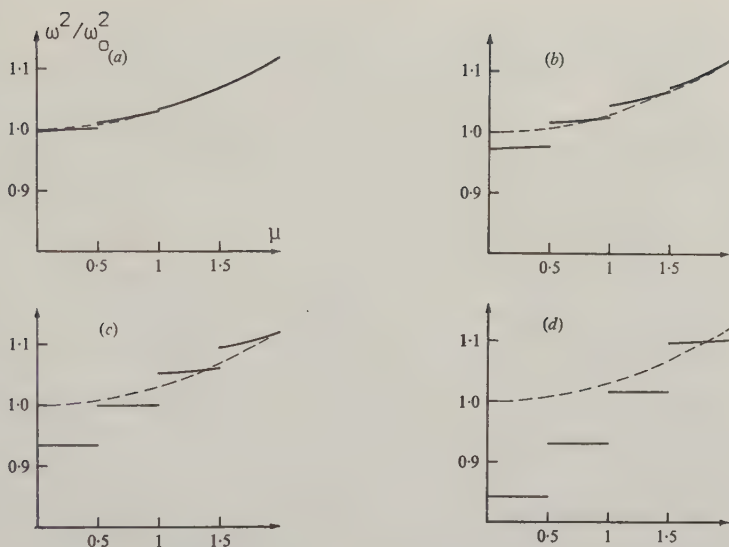


Figure 28. μ représente le rapport k_0/K .

(a) $\epsilon=0,01$, (b) $\epsilon=0,05$, (c) $\epsilon=0,1$, (d) $\epsilon=0,2$.

2.5. Comparaison avec les "expériences numériques" dans le cas d'un plasma maxwellien.

Il est intéressant de comparer les résultats du modèle "water bag" avec ceux obtenus par un traitement numérique complet de l'équation de VLASOV dans le cas maxwellien. Ce traitement a été donné par STATON /13/ à partir de la transformation de FOURIER - HERMITE de la fonction de distribution

$$f(x, v, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} f_{mr}(\omega) \exp(imk_0 x) \frac{1}{(2\pi r!)^{1/2} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\right]} He_r(v) \quad (88)$$

où x , v , ω sont normalisés à D , v_T et ω_0 . $He_r(v)$ est un polynôme d'HERMITE de degré r , un peu différent de ceux que nous avons utilisés au chapitre précédent. Ces polynômes satisfont à la relation d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(v) H_n(v) \exp\left[-\frac{v^2}{2}\right] dv = (2\pi n!)^{1/2} \delta_{mn}$$

L'équation de VLASOV linéarisée autour d'un équilibre inhomogène décrit par le champ $E^{(0)}(x)$ et la fonction de distribution $f^{(0)}(x,v)$, s'écrit, en unités normalisées

$$i\omega f^{(1)} + v \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x} + E^{(0)} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial v} + E^{(1)} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v} = 0$$

$$\text{avec } f^{(0)}(x,v) = (1 + \epsilon \cos Kx) \exp\left[-\frac{v^2}{2}\right]$$

En utilisant pour $f^{(1)}$ la décomposition en série de FOURIER-HERMITE définie par (88), l'équation de VLASOV devient

$$\begin{aligned} i\omega f_{nq}^{(1)} + i n k_0 \left(q^{1/2} f_{n,q-1}^{(1)} + (q+1)^{1/2} f_{n,q+1}^{(1)} \right) \\ + q^{1/2} \sum_m E_{n-m}^{(0)} f_{m,q-1}^{(1)} + q^{1/2} \sum_m E_m^{(1)} f_{n-m,q-1}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

Cette équation, correspond à un système linéaire homogène infini d'équations algébriques pour les $f_{nq}^{(1)}(\omega)$. En pratique, seul un nombre fini de composantes de FOURIER et d'HERMITE, peut être conservé.

STATON considère (89) comme une relation de récurrence par rapport aux indices d'HERMITE q , permettant de calculer les éléments de plus haut indice d'HERMITE, en fonction des éléments de plus bas indice. De cette manière, le problème se ramène à une équation matricielle

$$\sum_{\beta} A_{\alpha\beta} f_{\beta 0}^{(1)} = 0$$

et il suffit, pour calculer les fréquences propres ω , d'annuler le déterminant de la matrice $(A_{\alpha\beta})$, ce qui exige un ordinateur de grande capacité.

Le cas envisagé par STATON est celui d'un plasma enfermé dans une boîte de longueur $L = 2\pi/K$, et qui s'étend de $x = 0$ à $x = L$. Nous devons donc prendre le signe - dans l'équation (87) et considérer la branche inférieure dans la figure 26. De plus, pour effectuer la comparaison avec le modèle "water bag" nous ne devons considérer que les grandes longueurs d'onde. La figure 29 montre les résultats numériques pour $k_D = 0,05$ (soit $KD = 0,1$). L'accord entre le modèle "water bag" (les ronds sur la figure) et les expériences numériques de STATON est excellent jusque $\epsilon = 0,08$ (les calculs avec la méthode de FOURIER-HERMITE n'ayant pu être poursuivis au-delà).

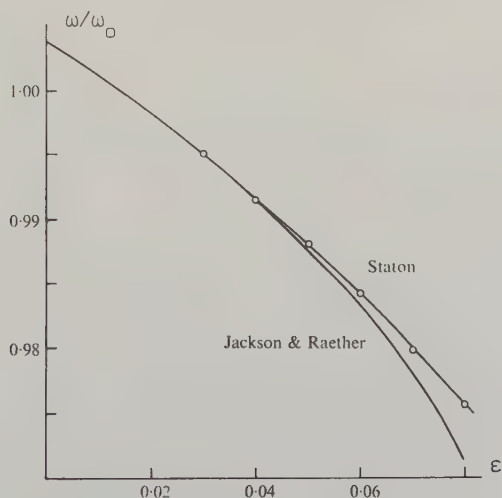


Figure 29

Nous avons porté également sur cette figure les résultats obtenus par JACKSON et RAETHER. La différence apparaissant pour $\epsilon > 0,04$ est due au fait que cette méthode, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.3 n'est valable qu'au premier ordre en ϵ , tandis que le "water bag" est correct à tout ordre en ϵ .

Pour ce problème (faible inhomogénéité et grande longueur d'onde) le "water bag" apparaît comme un modèle excellent, et les calculs numériques auxquels il donne lieu sont plus rapides que ceux utilisant la méthode complète de FOURIER-HERMITE.

3. INSTABILITE DOUBLE-FAISCEAU DANS UN PLASMA INHOMOGENE.

Une fonction de distribution du type double-faisceau peut être représentée par un modèle à deux contours, ainsi que nous en avons eu l'occasion de le faire dans les chapitres précédents. (Voir par exemple la figure 9). Pour simplifier, nous prendrons $A_2 = -A_1$, et nous n'étudierons que le cas $v_1^+ \rightarrow v_2^+$ et $v_1^- \rightarrow v_2^-$. Le coefficient A_2 tend alors vers l'infini, et la fonction de distribution est équivalente à une double fonction de DIRAC. Nous obtenons ainsi deux faisceaux d'électrons à température nulle, de vitesses respectives u_+ et u_- opposées.

KNORR /75/ a traité un problème semblable, mais pour des faisceaux ioniques et électroniques.

Chaque faisceau est un plasma froid, qui obéit aux équations hydrodynamiques sans terme de pression.

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial t} + u_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x} = -\frac{e}{m} E$$

$$\frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_{\pm} u_{\pm}) = 0$$

où n_+ et n_- sont respectivement les densités électroniques des faisceaux, supérieur et inférieur. Le couplage entre les deux faisceaux est assuré par le champ électrique qui obéit à l'équation de POISSON

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_+ + n_- - n_1)$$

3.1. Etat stationnaire : onde B.G.K.

Nous supposons un état stationnaire, avec des vitesses symétriques, soit

$$u_{\pm} = \pm a(x)$$

Avec cette distribution, nous sommes en mesure de construire une onde stationnaire du type B.G.K., avec n_1 constant. Cette solution stationnaire obéit aux équations

$$a \frac{da}{dx} = \frac{e}{m} E^{(0)}$$

$$\frac{dE^{(0)}}{dx} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(n_+^{(0)} + n_-^{(0)} - n_1 \right)$$

$$n_{\pm}^{(0)} a = C \frac{te}{e} = J/e$$

en désignant par J la densité de courant sur chaque faisceau. En combinant ces équations, nous obtenons

$$a \frac{d}{dx} \left(a \frac{da}{dx} \right) + \omega_0^2 a = \frac{2eJ}{m\epsilon_0}$$

où ω_0 représente la fréquence plasma correspondant à la densité ionique, ou à la densité électronique moyenne.

Cette équation peut se simplifier considérablement en utilisant la variable de LAGRANGE θ définie précédemment (équation 79). Il vient

$$\frac{d^2 a}{d\theta^2} + \omega_0^2 a = \frac{2eJ}{m\epsilon_0}$$

Nous écrivons la solution de cette équation sous la forme

$$a(\theta) = a_0 [1 + \epsilon \cos \omega_0 \theta] \quad \text{avec} \quad a_0 = \frac{2eJ}{m\epsilon_0 \omega_0^2}$$

La fréquence plasma locale est obtenue à partir de la conservation de la densité de courant, soit

$$\omega_p^2(\theta) = \frac{\omega_0^2}{1 + \epsilon \cos \omega_0 \theta} \quad (90)$$

Cette solution périodique en θ , l'est aussi en x . Son nombre d'onde est $K = \omega_0/a_0$. Nous avons ainsi construit une solution de type B.G.K., qui est exacte quel que soit le degré d'inhomogénéité ϵ . Signalons toutefois que ce traitement n'est plus valable si ϵ est supérieur à 1.

3.2. Méthode de calcul des fréquences propres.

Nous suivons la méthode utilisée pour un plasma stable. Nous recherchons d'abord l'équation linéarisée pour une petite perturbation. Les équations du "water bag" ne sont en effet pas directement utilisables sous la forme (76) à cause de la présence de termes infinis. Nous posons

$$u_{\pm} = \pm a(x) + w_{\pm}(x) \exp(i\omega t)$$

$$n_{\pm} = n_{\pm}^{(0)}(x) + n_{\pm}^{(1)}(x) \exp(i\omega t)$$

$$E = E^{(0)}(x) + (E_+^{(1)}(x) + E_-^{(1)}(x)) \exp(i\omega t)$$

en supposant pour toutes les quantités un comportement temporel en $\exp(i\omega t)$. Les équations linéarisées du modèle s'écrivent donc sous la forme

$$i\omega n_{\pm}^{(1)} + \frac{d}{dx} \left(n_{\pm}^{(0)} w_{\pm} \pm a n_{\pm}^{(1)} \right) = 0 \quad (91)$$

$$i\omega w_{\pm} \pm \frac{d}{dx} (a w_{\pm}) = \frac{e}{m} (E_+^{(1)} + E_-^{(1)}) \quad (92)$$

$$\frac{dE_{\pm}^{(1)}}{dx} = \frac{e}{\epsilon_0} n_{\pm}^{(1)} \quad (93)$$

En éliminant $w_{\pm}$ et $n_{\pm}$ entre ces équations, nous obtenons

$$\left(a \frac{d}{dx} \pm i\omega \right) a^2(x) \left(a \frac{d}{dx} \pm i\omega \right) E_{\pm}^{(1)}(x) + \frac{eJ}{\epsilon_0 m} a(x) (E_+^{(1)} + E_-^{(1)}) = 0$$

Nous pouvons, de plus, changer de variable, en introduisant la variable de LAGRANGE θ , ce qui revient à remplacer l'opérateur ad/dx par $d/d\theta$. D'autre part, ce système de deux équations différentielles du 2^{ème} ordre peut se transformer en une seule équation du 4^{ème} ordre, en posant

$$\Psi(\theta) = a(\theta) (E_+^{(1)}(\theta) + E_-^{(1)}(\theta))$$

Les calculs conduisent à

$$\frac{d^4 \Psi}{d\theta^4} + A(\theta) \frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} + B(\theta) \frac{d\Psi}{d\theta} + C(\theta) \Psi = 0 \quad (94)$$

$$\text{avec} \quad A(\theta) = 2\omega^2 + 2\omega_0^2 - \omega_p^2(\theta)$$

$$B(\theta) = -2 \frac{d}{d\theta} \omega_p^2(\theta)$$

$$C(\theta) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (\omega_0^2 - \omega^2) \omega_p^2(\theta) - \frac{d^2}{d\theta^2} \omega_p^2(\theta)$$

où $\omega_p^2(\theta)$ est donné par (90).

Le caractère périodique des coefficients A,B,C nous autorise à développer ψ sous forme d'une série de BLOCH-FLOQUET

$$\Psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n \exp i(k_0 + nK) a_0 \theta$$

où K représente le nombre d'onde de la solution B.G.K., soit $Ka_0 = \omega_0$.

En remplaçant cette solution dans (94), nous obtenons une équation matricielle de la forme

$$(M(\omega^2)) (\Psi) = 0 \quad (95)$$

où (Ψ) est une matrice colonne d'éléments Ψ_n . Les fréquences propres ω sont obtenues en annulant le déterminant de (M) . Cette matrice $(M(\omega^2))$ a une forme compliquée. Elle a néanmoins la même structure que dans le "water bag" simple (table 1).

Sur la diagonale principale, nous retrouvons les relations de dispersion du plasma homogène pour les modes $k = k_0 + nK$. Ces relations peuvent être obtenues à partir de l'équation de dispersion du modèle "water bag" homogène à 2 contours (équation 33 du chapitre 3), en faisant tendre a_1 et a_2 vers a_0 , soit

$$\omega^4 - \omega^2 (\omega_0^2 + 2k^2 a_0^2) + k^4 a_0^4 - k^2 a_0^2 \omega_0^2 = 0$$

dont les racines sont $\omega^2 = \omega_k^2$ et $\omega^2 = -\gamma_k^2$, avec γ_k^2 positif si k est inférieur à ω_0/a_0 (instabilité).

Le fait que l'inhomogénéité est périodique permet un couplage entre les différents k , et introduit une modification des racines ω_k^2 et γ_k^2 . Pour ϵ petit, les 2 diagonales bordant la diagonale principale sont d'ordre ϵ , les suivantes sont d'ordre ϵ^2 , etc...

Comme dans le cas du "water bag" simple, il y a couplage résonnant si $k_0/K=1/2$, soit $k_0 a_0/\omega_0=1/2$. Les fréquences propres sont, pour ϵ petit, données par (95) en ne gardant que les termes de rang - 1 et 0, soit

$$(\omega^2 - \omega_{K/2}^2) (\omega^2 + \omega_{K/2}^2) = \pm \frac{\epsilon}{2} \omega_0^2 \left(\omega^2 - \frac{3\omega_0^2}{4} \right) \quad (96)$$

$\omega_{K/2}^2$ et $-\gamma_{K/2}^2$ sont les fréquences propres de plasma homogène obtenues pour $\epsilon=0$, et qui correspondent aux nombres d'onde $k_0 = K/2$ ou $k_0 = -K/2$.

Dans ce problème, nous nous intéressons plus spécialement à l'évolution du taux de croissance γ . Nous posons

$$\omega^2 = -\gamma_{K/2}^2 + \delta$$

Au 1^{er} ordre en ϵ , l'équation (96) fournit

$$\delta = \pm \epsilon \omega_0^2 / 4$$

et nous obtenons alors

$$\gamma^2 = \gamma_{K/2}^2 \pm \omega_0^2 \frac{\epsilon}{4} \quad (97)$$

où γ désigne le taux de croissance, défini par $\gamma^2 = -\omega^2$.

Pour de plus fortes inhomogénéités, nous devons avoir recours à la résolution numérique de (95).

3.3. Calcul numérique des taux de croissance.

Comme pour le modèle "water bag" à un contour, nous résolvons numériquement (95). Sur la figure 30, nous montrons, pour $\epsilon = 0$ (cas d'un double faisceau homogène) et pour $\epsilon = 0,12$, le carré du taux de croissance normalisé à ω_0^2 , en fonction du rapport $k_0/K = k_0 a_0 / \omega_0$.

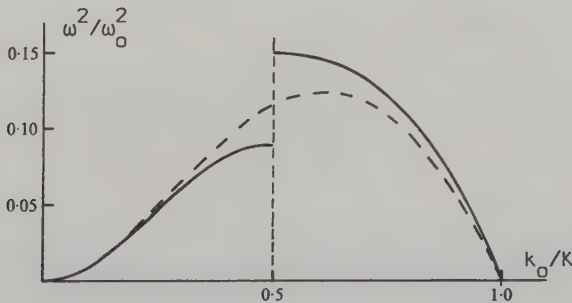


Figure 30. En pointillés : plasma homogène.

En trait plein : $\epsilon = 0,12$.

Comme prévu, cette courbe présente une discontinuité au point $k_0/K=1/2$. Pour la valeur choisie de ϵ , qui est assez faible, l'accord avec (97) est excellent.

En ce point, l'effet de l'inhomogénéité est rapidement prépondérant. Aussi, nous avons étudié ce cas soigneusement jusque $\epsilon = 0,8$. La figure 31 montre les deux courbes γ^2/ω_0^2 en fonction de ϵ pour $k_0/K=1/2$. Nous voyons que, pour la courbe supérieure, le taux de croissance devient rapidement plus important que prévu indiquant une forte déstabilisation du plasma. Néanmoins, pour le mode correspondant à la courbe inférieure, le taux de croissance tend lentement vers zéro, et il semblerait que ce mode puisse se stabiliser pour ϵ de l'ordre de 1.

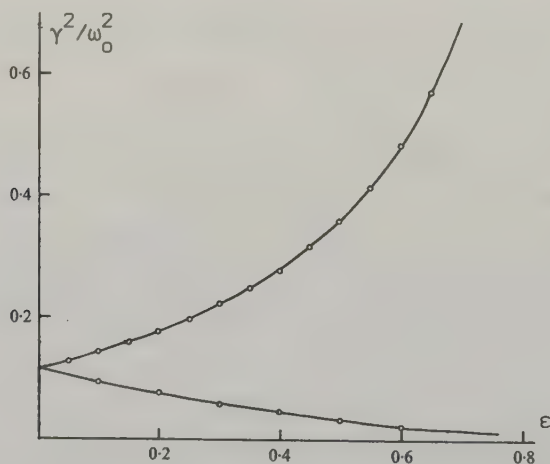


Figure 31

3.4. Comparaison avec un traitement analytique pour k petit.

Ce problème, que nous traitons pour n'importe quelle valeur de k_0 , avait été envisagé par ROWLANDS /76/ d'une manière différente.

Nos résultats sont obtenus par un formalisme de couplage de modes (avec de plus en plus d'ondes pour un taux d'inhomogénéité ϵ croissant). En revanche, ROWLANDS ne fait aucune supposition sur ϵ , mais il étudie le cas $k_0 \rightarrow 0$, par une méthode de perturbation au 1^{er} ordre en $k_0^2 a_0^2 / \omega_0^2$. Il trouve pour le taux de croissance

$$\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} = \frac{k_0^2 a_0^2}{\omega_0^2} \frac{(9 - 8(1-\epsilon^2)^{3/2})^{1/2} - 3 + 2(1-\epsilon^2)^{3/2}}{2 - 2(1-\epsilon^2)^{3/2}} + O\left(\frac{k_0^4 a_0^4}{\omega_0^4}\right)$$

Dans le cas d'un plasma homogène ($\epsilon \rightarrow 0$), cette formule redonne bien $\gamma_{k_0}^2 = k_0^2 a_0^2$ qui est le taux de croissance d'une instabilité double-faisceau dans le cas où $k_0 \rightarrow 0$. Pour effectuer la comparaison avec la formule de ROWLANDS, nous portons sur la figure 32 le rapport $\gamma^2 / \gamma_{k_0}^2 = \gamma^2 / k_0^2 a_0^2$ en fonction de ϵ .

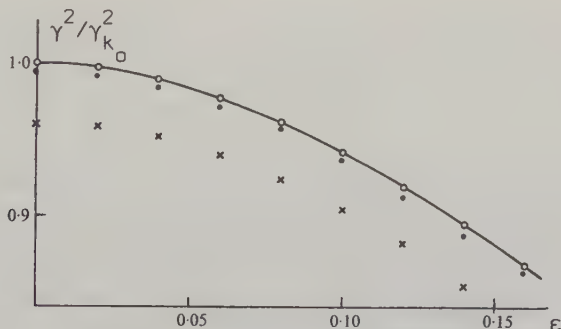


Figure 32. ——— courbe de Rowlands
 ooo $k_0/K = 0,02$
 ... $k_0/K = 0,04$
 xxx $k_0/K = 0,10$

Pour $k_0/K = 0,02$ et $0,04$ l'accord est excellent. La 3^{ème} courbe obtenue pour $k_0/K = 0,1$ montre, en fait, l'influence d'une longueur d'onde finie, sur la théorie de ROWLANDS, même dans le cas homogène ($\epsilon=0$).

Ces résultats permettent ainsi de tester la méthode que nous

proposons, et qui, rappelons-le, convient pour des taux d'inhomogénéité non négligeables ($\epsilon \sim 0,7 - 0,8$).

4. RECHERCHE D'UN CRITERE DE STABILITE - /77/.

L'étude précédente, effectuée sur une distribution particulière, est basée sur le calcul des fréquences propres. Elle a permis de montrer que le type de plasma envisagé (double-faisceau à température nulle) est instable quel que soit ϵ . On conçoit donc volontiers qu'il serait avantageux de pouvoir disposer d'un critère permettant d'affirmer si telle distribution est stable, ou non, sans avoir recours au calcul des fréquences.

Pour des situations homogènes, ce critère existe : c'est le critère de PENROSE, qui est basé sur le formalisme de la constante diélectrique.

Malheureusement, ce critère n'a pas d'équivalent en plasma inhomogène. Nous avons toutefois observé au chapitre 2, que le modèle "water bag" permettait de conclure à la stabilité d'un plasma inhomogène, pourvu que les coefficients A_j soient positifs. Inversement, si un A_j est négatif, le principe d'énergie minimum ne permet pas de conclure.

4.1. Instabilités en plasma homogène.

Une fonction $F_0(v)$ quelconque pour un plasma homogène infini, conduit à l'existence d'un certain nombre de pôles complexes, solutions de l'équation de dispersion. Certaines fonctions peuvent donner des modes instables se comportant comme $\exp(\gamma t + i\omega t)$, avec γ positif. Pour certaines distributions, par exemple, celles conduisant à l'instabilité faisceau-plasma, ω reste fini, et voisin de ω_p . Par contre, pour des

fonctions de distribution symétriques en vitesse et du type double-faisceau (figure 12), on a $\omega = 0$. L'application du critère de PENROSE à ce dernier cas montre que le mode instable existe pour tous les nombres d'onde compris dans l'intervalle $(0, k_M)$ avec k_M donné par

$$k_M^2 = \omega_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{dF_0}{dv} dv$$

La forme de la courbe $\gamma(k)$ qui en résulte est représentée sur la figure 33

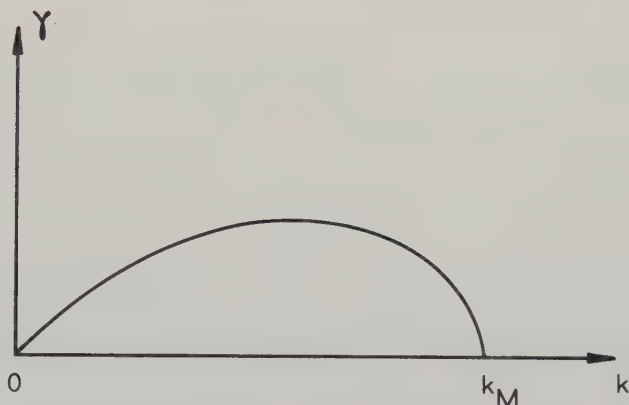


Figure 33

Lorsqu'on approxime la fonction double-faisceau par un "water bag" à deux contours comme nous l'avons fait au chapitre 3 (figure 12), la formule précédente redonne bien pour k_M la formule

$$k_M^2 = -2\omega_p^2 \left(\frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2} \right)$$

Pour un plasma borné, la notion de nombre d'onde maximum d'instabilité nous donne des indications sur la longueur L du plasma,

nécessaire pour le développement de l'instabilité. Si L est telle que $k_M L \gg 1$, le système aura des propriétés identiques à celles d'un système infini. En revanche, si $k_M L < 1$, nous pouvons penser qu'aucune instabilité ne pourra se développer.

4.2. Le concept de mode marginal adiabatique.

Nous appelons mode marginal adiabatique, un mode, qui, à la limite d'instabilité, se comporte comme $\exp(\gamma t)$ avec $\gamma \rightarrow 0$, ce qui revient à admettre que le système devient instable à travers le point $\omega^2 = 0$. C'est le cas pour une distribution homogène du type double-faisceau.

Nous supposons alors une distribution inhomogène à l'équilibre, symétrique en vitesse, du type double-faisceau, et approximée par un modèle "water bag" à M contours, (définis par $v_j^\pm(x) = \pm a_j(x)$). Nous supposons, comme en milieu homogène, que ce système devient instable à travers le point $\omega^2 = 0$: si ω^2 est légèrement positif, il se comporte comme $\exp(i\omega t)$; si ω^2 est légèrement négatif, nous posons $\gamma^2 = -\omega^2$, et le système se comporte comme $\exp(\gamma t)$. Le mode obtenu pour $\omega^2 = 0$ est le mode marginal adiabatique. Il est décrit par les M équations différentielles (76), où le membre de gauche est annulé, soit

$$\omega_j^2 E^{(1)} - a_j \frac{d}{dx} \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right) = 0 \quad \text{avec } j=1, \dots, M$$

Le point important est que ces M équations peuvent se ramener à une seule. Il suffit pour cela de diviser par a_j , puis d'intégrer d'un point x_0 à x , de diviser à nouveau par a_j et de sommer les M équations sur tous les contours, soit

$$\frac{e^2}{\epsilon_0 m} \sum_{j=1}^M \frac{2A_j}{a_j} \int_{x_0}^x E^{(1)}(x') dx' - \frac{dE^{(1)}}{dx} = 0$$

Le choix du point x_0 est déterminé de telle sorte que pour chaque contour,

on ait $dE_j^{(1)}(x_0)/dx = 0$.

Nous introduisons le potentiel ϕ dont dérive le champ $E^{(1)}$

$$\phi(x) = - \int_{x_0}^x E^{(1)}(x') dx'$$

Nous obtenons l'équation du mode marginal

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - k^2(x) \phi = 0 \quad (98)$$

où $k^2(x)$ est la fonction définie au paragraphe 1, par (75).

Cette équation, très simple, avait déjà été obtenue par SANTINI /78/. Mais contrairement à lui, nous sommes en mesure d'en indiquer une signification physique simple, et de montrer comment cette équation peut nous être utile pour étudier la stabilité.

Tout d'abord, si le nombre de contours tend vers l'infini, la distribution du "water bag" tend vers la fonction continue $f_0(x,v)$, et l'expression correspondante de $k^2(x)$ s'écrit alors (A_j correspondant à $-\partial f_0/\partial v$)

$$k^2(x) = - \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv$$

Pour un plasma homogène, avec $f_0(v) = n_0 F_0(v)$, cette expression s'écrit encore $k^2 = -k_M^2$; c'est, au signe près, le carré du nombre d'onde maximum d'instabilité. La fonction $k^2(x)$, dans le cas inhomogène, est maintenant une quantité locale, fonction de x . Le mode marginal est ainsi le mode de plus petite longueur d'onde locale, dont l'équation de propagation (98) est analogue à une équation de propagation d'une onde dans une cavité : à la limite d'instabilité, les régions où $k^2(x)$ est négatif, correspondent à la possibilité d'une propagation du mode instable.

En dehors de ces régions, le mode ne peut se propager.

Pour obtenir globalement la stabilité, nous remarquons que l'équation stationnaire (74) a bien évidemment une solution. En revanche, l'équation (98) qui a presque la même forme (ϕ remplaçant $E^{(0)}$) n'a en général pas de solutions. Mais nous pouvons toujours calculer les valeurs propres λ de l'équation

$$\left(k^2(x) - \frac{d^2}{dx^2} \right) \phi = \lambda \phi \quad (99)$$

avec les conditions aux limites $(d\phi/dx)_{x=\pm\infty} = 0$. Cette équation, comme cela a été remarqué par FEIX et al. /79/ correspond au mode marginal qui existerait dans un plasma virtuel caractérisé par $k^2(x) - \lambda$ au lieu de $k^2(x)$. Deux possibilités peuvent se présenter

a) tous les λ sont positifs : le plasma virtuel est moins "stable" en tous points. Nous devons alors "déstabiliser" notre plasma pour qu'il puisse contenir au moins un mode marginal, et nous en concluons que ce milieu est stable (du moins pour des instabilités avec $\omega^2 = 0$ marginalement).

b) au moins un λ est négatif : pour cette valeur propre, nous "stabilisons" le plasma pour lui faire supporter un mode marginal. Nous concluons alors à l'instabilité.

Mathématiquement, les propriétés de stabilité peuvent se déterminer à partir du calcul des valeurs propres d'un opérateur du type SCHROEDINGER (99); le signe de ces valeurs propres indique la stabilité ($\lambda > 0$ pour la stabilité et $\lambda < 0$ pour l'instabilité).

Avec ce critère, nous sommes en mesure d'expliquer pourquoi la fonction de distribution double-faisceau à température nulle, est toujours instable. Une telle fonction de distribution peut en effet s'écrire

$$f_0(x, v) = n_+^{(0)} \delta(v - a) + n_-^{(0)} \delta(v + a)$$

soit

$$k^2(x) = - \frac{e^2}{\epsilon_0 m} \frac{n_+^{(0)} + n_-^{(0)}}{a^2} < 0$$

La fonction $k^2(x)$ étant périodique, l'équation (99) est une équation de HILL. La théorie générale /73/ indique que la première valeur propre est comprise entre le minimum et le maximum de $k^2(x)$. Comme $k^2(x)$ est toujours négatif, il existe donc une valeur propre $\lambda < 0$, ce qui permet de conclure à l'instabilité.

4.3. Application à un type particulier de plasma double-faisceau.

Pour tester et éclairer cette théorie du mode marginal, considérons le modèle "water bag" à deux contours de la figure 34, (avec $A_1 < 0$ pour être dans le cas d'une distribution de type double-faisceau). Les discontinuités aux points $x = \pm L$ délimitent trois zones qui sont chacune homogènes, le système dans son ensemble se comportant comme un milieu inhomogène. De plus, nous faisons en sorte que la zone centrale corresponde à un milieu "instable" ($k^2 < 0$), les deux zones externes étant "stables" ($k^2 > 0$). Du point de vue de la stabilité marginale, le problème de l'existence de l'instabilité est équivalent à considérer l'existence d'une onde électromagnétique dans une cavité résonante délimitée par deux milieux absorbants /80/.

4.3.1. Etat stationnaire.

Nous cherchons d'abord à examiner d'un point de vue physique, la possibilité de réaliser un tel système.

Chaque discontinuité peut être créée par un dipôle formé de deux

grilles transparentes aux électrons, séparées par une distance Δ très petite, et portées à des potentiels opposés $\pm \Phi/2$. Le profil de potentiel dans le plasma est indiqué sur la figure 35

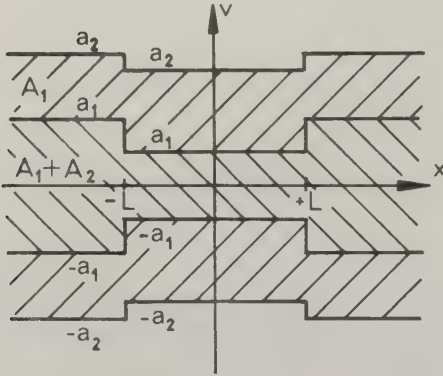


Figure 34

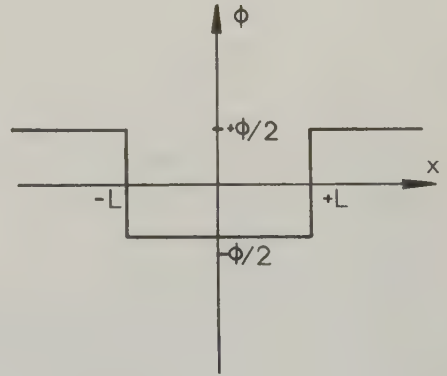


Figure 35

Nous supposons de plus, que la densité ionique reste constante et égale à n_1 . L'inhomogénéité est ainsi due uniquement aux charges sur la grille. La connaissance de A_1 , A_2 , n_1 et Φ permet alors de calculer les contours. Il suffit d'écrire les équations de neutralité électrique et de conservation de l'énergie d'un électron sur chaque contour

$$\begin{aligned} n_1 &= 2 (A_1 a_1 + A_2 a_2) = 2 (A_1 a_1' + A_2 a_2') \\ -e\Phi &= \frac{m}{2}(a_1^2 - a_1'^2) = \frac{m}{2}(a_2^2 - a_2'^2) \end{aligned}$$

Le prime correspond à la zone centrale. La résolution de ce système conduit aux expressions suivantes

$$\begin{aligned} a_1' &= -\frac{n_1}{2} \frac{A_1}{A_2^2 - A_1^2} - \frac{e\Phi}{m} \frac{A_2^2 - A_1^2}{n_1 A_1} \\ a_1 &= -\frac{n_1}{2} \frac{A_1}{A_2^2 - A_1^2} + \frac{e\Phi}{m} \frac{A_2^2 - A_1^2}{n_1 A_1} \end{aligned}$$

Les valeurs de a_2 et a_2' sont obtenues en permutant dans les expressions précédentes, les indices 1 et 2. La fonction $k^2(x)$ a alors pour valeur

$$k^2(x) = \begin{cases} \chi_0^2 & \text{si } x < -L \text{ et } x > +L \\ -k_0^2 & \text{si } -L < x < +L \end{cases}$$

où χ_0^2 et k_0^2 sont deux quantités positives, définies par

$$\frac{n_1^2}{2\omega_0^2 (A_2^2 - A_1^2)} \chi_0^2 = \Phi \frac{1 - \beta^2}{(\beta^2 + \Phi)(1 + \Phi)}$$

$$\frac{n_1^2}{2\omega_0^2 (A_2^2 - A_1^2)} k_0^2 = \Phi \frac{1 - \beta^2}{(\beta^2 - \Phi)(1 - \Phi)}$$

β et Φ étant deux variables sans dimension définies par

$$\beta = -A_1/A_2 \quad \text{et} \quad \Phi = (-e\Phi/m) \cdot 2(A_2^2 - A_1^2)^2 / n_1^2 A_2^2$$

4.3.2. Conditions de continuité.

Le calcul du mode marginal ou des fréquences propres, peut être réalisé simplement en appliquant les conditions aux limites sur les fonctions ϕ , $E_j^{(1)}$ ou $E_j^{(1)}$, aux points $x = \pm L$. Le problème est de déterminer ces conditions aux limites.

Nous supposons alors, dans un "water bag" à M contours, que le $j^{\text{ième}}$ subisse une discontinuité du premier ordre en un point x_0 . Le saut de $a_j(x)$ restant fini en ce point, la fonction $E_j^{(1)}$ doit être continue. Par conséquent $E^{(1)}$ et ϕ sont continues.

Pour trouver la deuxième condition de continuité sur $E_j^{(1)}$, nous divisons l'équation (76) par a_j et nous l'intégrons de $x_0 - \epsilon$ à $x_0 + \epsilon$

$$\omega^2 \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \frac{E_j^{(1)}}{a_j} dx + \frac{2e^2 A_j}{\epsilon_0 m} (\phi(x_0+\epsilon) - \phi(x_0-\epsilon)) + \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right)_{x=x_0+\epsilon} - \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right)_{x=x_0-\epsilon} = 0$$

Si nous faisons tendre ϵ vers 0, nous obtenons la condition

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right)_{x_0+\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(a_j \frac{dE_j^{(1)}}{dx} \right)_{x_0-\epsilon}$$

4.3.3. Etude de la stabilité marginale.

La solution de l'équation (99) peut s'écrire très simplement

$$\phi(x) = \begin{cases} b \exp(\chi_0^2 - \lambda)^{1/2} x & \text{si } -\infty < x < -L \\ c \exp(i(k_0^2 + \lambda)^{1/2} x) + d \exp(-i(k_0^2 + \lambda)^{1/2} x) & \text{si } -L < x < +L \\ e \exp(-(\chi_0^2 - \lambda)^{1/2} x) & \text{si } +L < x < +\infty \end{cases}$$

Nous écrivons ensuite la continuité de ϕ et $E^{(1)}$ (soit $d\phi/dx$) aux points $x = \pm L$. Le calcul, identique à celui de la propagation d'une onde électromagnétique dans une cavité donne pour les modes symétriques ($c = d$, $b = e$)

$$\operatorname{tg}((k_0^2 + \lambda)^{1/2} L) = \left(\frac{\chi_0^2 - \lambda}{k_0^2 + \lambda} \right)^{1/2} \quad (100)$$

Si nous considérons que cette équation définit L comme une fonction de λ , nous pouvons montrer aisément que $dL/d\lambda$ est négatif. Le plasma sera donc instable ($\lambda < 0$) si L est plus grand que la valeur L_0 obtenue pour $\lambda = 0$ soit

$$L_0 = \frac{1}{k_0} \operatorname{Arctg} \frac{\chi_0}{k_0} \quad (101)$$

Pour les modes antisymétriques ($c = -d$, $b = -e$) l'instabilité apparaît pour une longueur plus grande, soit $L_0 + \pi/2k_0$. Ainsi, $2L_0$ est la longueur minimum de la zone centrale qui permet le développement de l'instabilité.

La formule (101) peut encore s'écrire approximativement

$$2 L_0 \sim \frac{\ell}{2} \quad (102)$$

où $\ell = 2\pi/k_0$, représente la longueur d'onde du mode marginal adiabatique dans la zone centrale. Nous obtenons ainsi un premier résultat intéressant : dès que la longueur de la zone centrale est supérieure à $\ell/2$, c'est-à-dire, dès qu'il est possible de placer une demi-longueur d'onde du mode instable ayant la plus petite longueur d'onde, le système est instable, quelles que soient les propriétés des zones extérieures.

Un deuxième résultat intéressant peut être obtenu en remarquant, dans la formule (101), que si χ_0 est voisin de zéro, L_0 est également voisin de zéro. Par conséquent, si les zones extérieures sont stables, sans être trop loin de l'instabilité, la présence d'une petite zone instable suffit pour que le système soit globalement instable.

4.3.4. Calcul direct des fréquences propres.

La meilleure façon de tester ce critère, est de calculer directement les fréquences propres de l'équation (76). Cela nous permettra également d'obtenir des informations sur l'existence d'autres types d'instabilité dans un plasma inhomogène de type double-faisceau (par exemple, apparition de modes en $\exp(\gamma t + i\omega t)$ avec ω fini) dont le traitement n'est évidemment plus justiciable du critère de stabilité marginale.

Chaque zone étant homogène, nous recherchons localement les solutions du système (76) sous la forme $\exp(ikx)$. En remplaçant dans (76) il vient, pour les zones externes

$$K^4 - K^2 \left[\omega^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} \right) - \chi_0^2 \right] + \frac{\omega^4 - \omega_0^2 \omega^2}{a_1^2 a_2^2} = 0$$

Pour la zone centrale, nous avons la même équation, où a_1 , a_2 et χ_0^2 sont remplacés respectivement par a_1' , a_2' et $-k_0^2$. Pour une valeur de ω donnée cette équation possède quatre racines : $\pm k_1(\omega)$ et $\pm k_2(\omega)$ pour les zones externes, $\pm k_1'(\omega)$ et $\pm k_2'(\omega)$ pour la zone centrale, ce qui permet d'écrire la solution complète de la manière suivante

$$E_1^{(1)} = \begin{cases} b_1 \exp(ik_1 x) + b_2 \exp(ik_2 x) & \text{si } -\infty < x < -L \\ c_1 \exp(ik_1' x) + d_1 \exp(-ik_1' x) + c_2 \exp(ik_2' x) + d_2 \exp(-ik_2' x) & \text{si } -L < x < L \\ e_1 \exp(-ik_1 x) + e_2 \exp(-ik_2 x) & \text{si } +L < x < \infty \end{cases} \quad (103a)$$

$$E_2^{(1)} = \begin{cases} b_1 g_1 \exp(ik_1 x) + b_2 g_2 \exp(ik_2 x) & \text{si } -\infty < x < -L \\ g_1' (c_1 \exp(ik_1' x) + d_1 \exp(-ik_1' x)) + g_2' (c_2 \exp(ik_2' x) + d_2 \exp(-ik_2' x)) & \text{si } -L < x < L \\ e_1 g_1 \exp(-ik_1 x) + e_2 g_2 \exp(-ik_2 x) & \text{si } +L < x < \infty \end{cases} \quad (103b)$$

$$\text{avec } \left. \begin{aligned} g_m &= \frac{\omega^2}{\omega_1^2} - 1 - \frac{a_1^2}{\omega_1^2} k_m^2 \\ g_m' &= \frac{\omega^2}{\omega_1'^2} - 1 - \frac{a_1'^2}{\omega_1'^2} k_m'^2 \end{aligned} \right\} \text{ pour } m = 1, 2$$

k_1 et k_2 sont tels que $\text{Im}(k_1)$ et $\text{Im}(k_2)$ soient négatives.

Les conditions de continuité sur $E_j^{(1)}$ et $a_j(dE_j^{(1)}/dx)$ aux points $x = \pm L$ nous donnent un système homogène de 8 équations, et les fréquences propres ω doivent ainsi annuler un déterminant 8×8 . On peut le simplifier considérablement par symétrisation, et antisymétrisation des champs. Nous posons

$$\begin{aligned} b_m &= b_m^+ + b_m^- & c_m &= c_m^+ + c_m^- \\ e_m &= e_m^+ + e_m^- & d_m &= d_m^+ - d_m^- \end{aligned} \quad \text{pour } m = 1, 2$$

L'indice + correspond à la partie symétrique, et l'indice - à la partie antisymétrique. Nous devons donc avoir

$$\begin{aligned} b_m^+ &= e_m^+ & c_m^+ &= d_m^+ \\ b_m^- &= -e_m^- & c_m^- &= -d_m^- \end{aligned}$$

L'équation de compatibilité se présente maintenant sous une forme plus simple

$$\begin{vmatrix} \Delta^+ & (0) \\ (0) & \Delta^- \end{vmatrix} = \Delta^+ \Delta^- = 0$$

où Δ^+ et Δ^- sont deux déterminants 4×4 correspondant respectivement aux parties symétriques et antisymétriques des champs, soit pour Δ^+

$$\begin{vmatrix} \exp(-ik_1 L) & \exp(-ik_2 L) & \cos k_1' L & \cos k_2' L \\ g_1 \exp(-ik_1 L) & g_2 \exp(-ik_2 L) & g_1' \cos k_1' L & g_2' \cos k_2' L \\ ik_1 a_1 \exp(-ik_1 L) & ik_2 a_1 \exp(-ik_2 L) & k_1' a_1' \sin k_1' L & k_2' a_1' \sin k_2' L \\ ik_1 a_2 g_1 \exp(-ik_1 L) & ik_2 a_2 g_2 \exp(-ik_2 L) & k_1' a_2' g_1' \sin k_1' L & k_2' a_2' g_2' \sin k_2' L \end{vmatrix}$$

Δ^- se déduit de Δ^+ en remplaçant les symboles $\cos$ par $-\sin$, les symboles

sin par cos. En développant ces déterminants nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta^+ \exp i(k_1+k_2)L &= \delta_1 \sin k_1' L \sin k_2' L + \delta_2 \sin k_1' L \sin k_2' L \\ &+ \delta_3 \cos k_1' L \cos k_2' L + \delta_4 \cos k_1' L \sin k_2' L\end{aligned}$$

et la formule correspondante pour Δ^- , avec

$$\begin{aligned}\delta_1 &= k_1' k_2' a_1' a_2' (g_2 - g_1) (g_2' - g_1') \\ \delta_2 &= i k_1' (k_1 (g_2' - g_2) (a_1' a_2 g_1 - a_1 a_2' g_1') + k_2 (g_2' - g_1) (a_1 a_2 g_1' - a_1' a_2 g_2)) \\ \delta_3 &= i k_2' (k_1 (g_2 - g_1') (a_1' a_2 g_1 - a_1 a_2' g_2') + k_2 (g_1 - g_1') (a_1 a_2 g_2' - a_1' a_2 g_2)) \\ \delta_4 &= -k_1 k_2 a_1 a_2 (g_2 - g_1) (g_2' - g_1')\end{aligned}$$

4.3.5. Résultats.

Nous calculons pour commencer, le taux de croissance γ du système. Nous posons donc $\omega^2 = -\gamma^2$ avec $\gamma^2 > 0$. Par conséquent k_1 et k_2 sont imaginaires purs tandis que k_1' et k_2' sont réels. Les quantités $\Delta^\pm \exp i(k_1+k_2)L$ sont ainsi des fonctions réelles de la variable γ . Les équations

$$\Delta^\pm \exp i(k_1+k_2)L = 0$$

sont à résoudre numériquement par la méthode de NEWTON.

Sur la figure 36 nous portons le carré du taux de croissance normalisé à ω_0^2 en fonction du rapport L/L_0 , où L_0 est donné par la formule (101). L'apparition des modes instables uniquement pour $L > L_0$ est une preuve formelle de la théorie du mode marginal adiabatique.

La forme de ces courbes peut être expliquée en considérant les zones externes comme des milieux complètement absorbants, avec χ_0 infini. Le système est alors équivalent à un plasma homogène borné, de longueur $2L$.

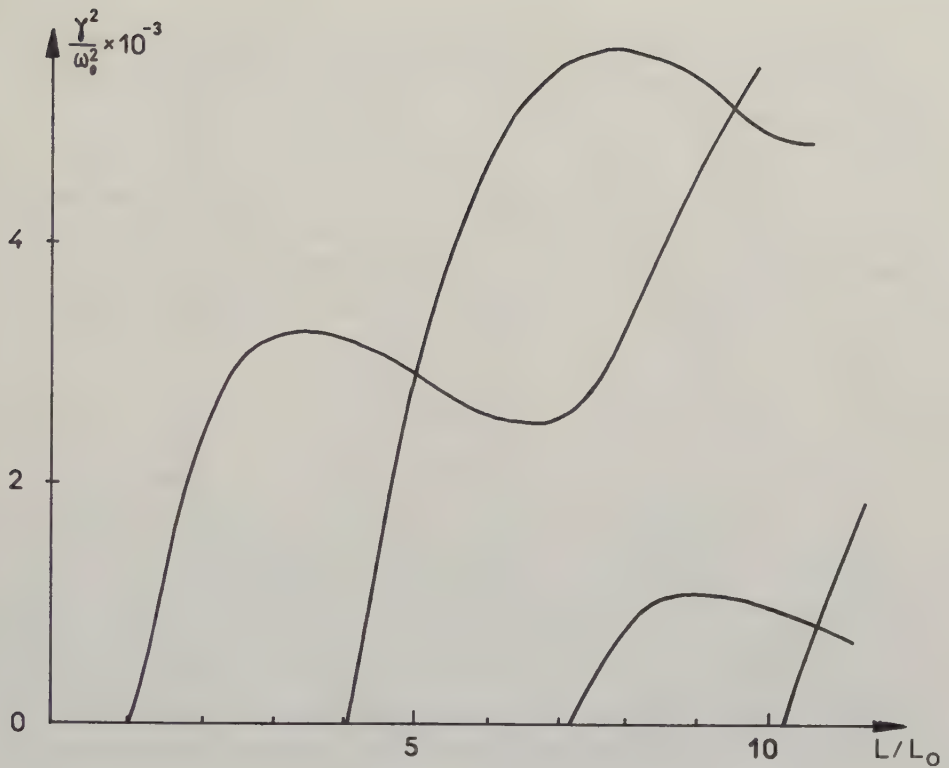


Figure 36

La relation entre le taux de croissance et le nombre d'onde d'un plasma homogène est indiquée sur la figure 33. Comme nous avons un système fini, le plus petit nombre d'onde possible est $K_1 = \pi/2L$. Si L est petit, K_1 est plus grand que le nombre d'onde maximum d'instabilité k_0 , et le milieu est stable. Si nous augmentons L , K_1 décroît, et l'instabilité apparaît dès que K_1 est égal à k_0 (soit $2L = \lambda/2$). Le taux de croissance croît, atteint le maximum permis sur la figure 33, puis commence à décroître. A ce moment, le deuxième nombre d'onde susceptible de se propager dans le plasma (soit $K_2 = 2K_1$), devient instable. Nous avons alors $2L = \lambda$.

Ces phénomènes se retrouvent grossièrement représentés sur la

figure 36. Bien entendu, l'inhomogénéité introduit un couplage assez important entre ces différents modes, et il ne peut être question de faire des comparaisons plus fines.

Il nous reste alors à rechercher d'éventuelles fréquences propres complexes, ce qui revient à chercher des instabilités apparaissant à travers un point $\omega^2 \neq 0$. Nous écrivons alors $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ et $\Delta^\pm \exp i(k_1 + k_2)L = X^\pm + iY^\pm$. Pour une longueur $2L$ donnée, nous avons à résoudre le système

$$X^\pm(\omega_1, \omega_2) = 0$$

$$Y^\pm(\omega_1, \omega_2) = 0$$

Dans le plan complexe des ω , ces deux équations définissent deux séries de courbes, les intersections de ces deux faisceaux fournissant les solutions. Sur la figure 37 nous montrons, dans le plan complexe des ω , les courbes $X^- = 0$ et $Y^- = 0$, pour diverses valeurs de L/L_0 . Pour $L/L_0 < 1$, il n'y a pas de solutions. Les points $\omega/\omega_0 = 0$ et $\omega/\omega_0 = 1$ ne doivent, en effet, pas être considérés comme solutions, car en ces points on a $k_1 = k'_1 = 0$, et les champs $E_1^{(1)}$ et $E_2^{(1)}$ n'ont plus la forme (103).

Pour $L/L_0 > 1$, les seules solutions sont les fréquences imaginaires pures, calculées précédemment et portées sur la figure 36.

Par conséquent, dans ce cas particulier d'une fonction de distribution double-faisceau inhomogène, il n'y a pas de pôles complexes; l'instabilité apparaît uniquement à travers le point $\omega^2 = 0$, et le critère de stabilité marginale est bien vérifié.

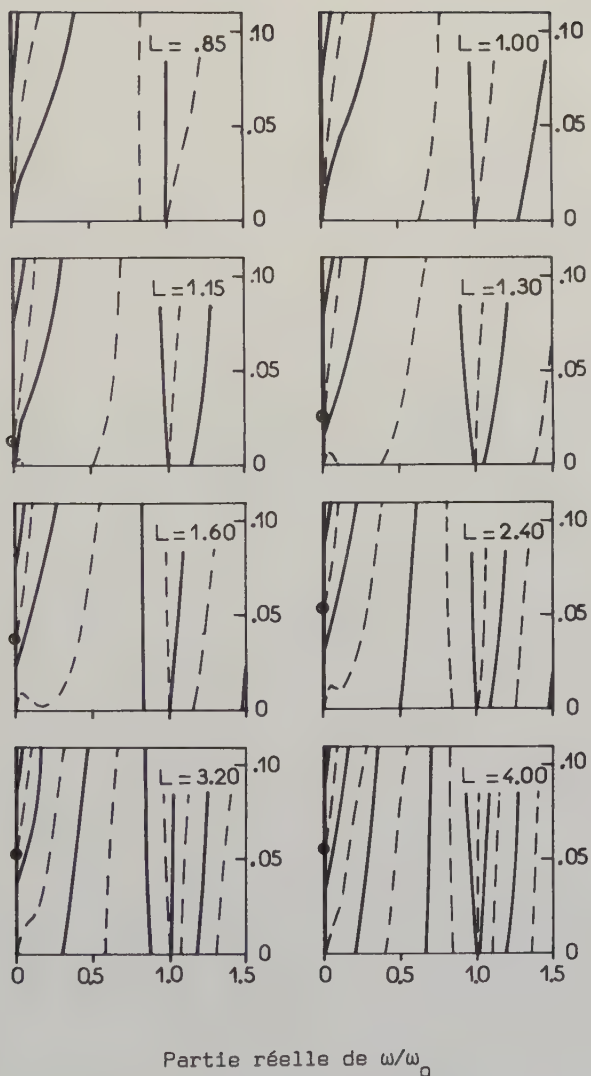


Figure 37 : — courbes $Y^- = 0$
 --- courbes $X^- = 0$
 L'axe $\text{Re}(\omega) = 0$ est solution de $Y^- = 0$

5. CONCLUSION.

Les principaux résultats de ce chapitre sont de deux types.

a) L'utilisation du modèle "water bag" permet de remplacer l'équation intégrale des modes propres d'un plasma inhomogène (avec son noyau compliqué) par un système d'équations différentielles couplées (76). D'un point de vue numérique, un tel système est vraisemblablement plus aisé à mettre en œuvre. D'un point de vue analytique, les calculs avec un ou deux contours sont aisés, et permettent d'inclure correctement dans le problème les principaux phénomènes physiques intéressants. C'est ainsi que le modèle à un contour conduit, pour les grandes longueurs d'onde, à des résultats en très bon accord avec ceux obtenus par un traitement numérique de l'équation de VLASOV (figure 29).

b) Pour la recherche de critères de stabilité, si nous savons que la première instabilité apparaît à travers le point $\omega^2 = 0$, le système des M équations du "water bag" dégénère en une seule équation (98), et nous avons uniquement à calculer les valeurs propres de l'opérateur $k^2(x) - d^2/dx^2$. Cette méthode a été testée avec succès sur une situation simplifiée, où l'instabilité apparaît uniquement à travers le point $\omega^2 = 0$ (figure 34).

CONCLUSION GENERALE

La complexité de l'équation de VLASOV dans l'étude des plasmas non collisionnels, nous a conduit, tout au long de ce travail, à adopter une philosophie analytico-numérique. Chaque étude analytique est complétée, et éventuellement doublée, d'une étude numérique. Le problème général qui s'est posé à nous, a donc été de discrétiser l'espace des phases, et plus précisément l'espace des vitesses. En analyse numérique, on ne peut, en effet, considérer qu'un nombre fini de degrés de liberté.

Diverses représentations de la fonction $f(v)$ s'offrent à nous : série de polynômes d'HERMITE, somme de fonctions de DIRAC (modèle des faisceaux de DAWSON /81/), fonction en escalier. A ce propos, nous pouvons remarquer que le modèle "water bag" est un compromis entre une représentation de $f(v)$ très grossière (modèle de DAWSON) et d'autres plus fines mais conduisant à des relations de dispersion complexes (approximation de $f(v)$ par une ligne polygonale par exemple).

Les questions qui se posent, en fait, lors du choix d'un modèle sont de trois types :

1) Comment choisir les degrés de liberté pour que le système soit le mieux représenté. Plus précisément, est-il possible d'avoir une idée claire du prix à payer, et surtout est-il possible de le payer une

fois pour toutes. En effet, tout au long des calculs, il faut éviter de faire des approximations dont on ne contrôle pas la cohérence.

2) Est-il possible de se contenter d'un très petit nombre de degrés de liberté et quels phénomènes pourra-t-on ainsi espérer représenter.

3) Enfin, peut-on mettre en évidence des concepts simples permettant des calculs analytiques aisés.

Dans ce travail, nous nous sommes efforcés de montrer que le modèle "water bag" permettait de répondre à ces trois questions.

a) L'hypothèse de base du modèle consiste à donner à la fonction de distribution des valeurs constantes dans certains domaines de l'espace des phases. Cette hypothèse, faite à l'instant initial, se conserve au cours du temps par suite de l'équation de VLASOV. Le prix pour ce modèle est ainsi payé une fois pour toutes : il faut considérer des conditions initiales un peu particulières, ensuite le système est décrit par des équations rigoureuses.

b) Il est possible de se contenter d'un très petit nombre de contours du "water bag". En effet,

- Le modèle "water bag" simple (un seul contour) est non seulement rigoureux pour les conditions initiales du type $f = A$, mais en plus, il est une excellente approximation des phénomènes à grandes longueurs d'onde pour les conditions initiales "adiabatiques", c'est-à-dire telles que l'invariant P_n^{-3} ne soit pas perturbé. Ce modèle permet un traitement analytico-numérique à tout ordre du paramètre de non linéarité ou d'inhomogénéité. Nous avons, ainsi, mis en évidence des effets non linéaires (apparition d'harmoniques, dérive de fréquence) et des effets dus à la présence d'une inhomogénéité (apparition de bandes étroites de fréquence). Il est remarquable de constater l'accord entre nos théories et un traitement complet de l'équation de VLASOV à l'aide d'"expériences" numériques sur un plasma maxwellien.

- Le cas de 2 ou 3 contours permet de rendre compte très simplement de phénomènes d'instabilité avec un très petit nombre de paramètres

Par exemple un modèle à deux contours permet de mettre en évidence l'instabilité double-faisceau. Nous avons ainsi pu étudier cette instabilité en milieu inhomogène.

- Enfin, même des phénomènes plus délicats, comme l'amortissement LANDAU, peuvent être correctement représentés à condition de prendre un plus grand nombre de contours (de 20 à 100).

c) A la troisième question posée, nous pouvons répondre que les concepts analytiques du "water bag" sont remarquablement simples. Le problème linéarisé en est une illustration. Avec le modèle maxwellien, on se heurte, pour des temps petits, à des difficultés que l'on ne retrouve pas dans le modèle "water bag" : en effet, ce modèle peut être représenté par une base de fonctions propres qui ne sont rien d'autre que des modes de VAN KAMPEN discrétisés. Nous pouvons également signaler un autre concept analytique remarquable : il s'agit de la simplicité de l'introduction, à l'aide du modèle "water bag", de la notion de mode marginal adiabatique. Cette notion est très importante pour l'étude des instabilités de type double-faisceau en milieu inhomogène.

Pour une étude plus complète des effets légèrement non linéaires, la base des fonctions propres du "water bag" semble être d'une utilisation prometteuse. Elle se prête bien à l'application de méthodes analytico-numériques. Un problème important va alors se poser : comment représenter au mieux une intégrale sur les fréquences, par une série de modes propres ; le choix des contours à l'équilibre est donc très important car il conditionne la discrétisation de l'axe des fréquences.

Un autre problème important à résoudre est l'étude systématique des instabilités de type double-faisceau (stabilité marginale, théorème de BLOCH-FLOQUET). Ceci implique au préalable l'étude complète des solutions stationnaires du type B.G.K. Un modèle à 2 contours semble très intéressant, car il permet, à l'aide de 3 paramètres, une étude exhaustive de tous les cas.

Le modèle "water bag" semble enfin offrir des perspectives prometteuses pour les "expériences numériques". Un modèle mixte a récemment été mis au point par l'équipe de PRINCETON /82/. Les ions sont traités par un modèle "water bag" simple, tandis que le mouvement des électrons est résolu numériquement par la méthode lagrangienne des superparticules.

En conclusion, le modèle "water bag" prend sa place parmi les modèles mathématiques de plasma, entre les modèles lagrangiens et eulériens. Cette double appartenance lui confère une grande souplesse, et lui permet de servir de trait d'union entre des études purement numériques et des études plus analytiques : nous pouvons dès à présent remplacer systématiquement l'optique hydrodynamique par l'optique "water bag simple", quelquefois identique, mais toujours supérieure.

Pour finir, nous devons quand même mentionner une difficulté : le passage à une vraie géométrie bidimensionnelle semble délicat à envisager : un "water bag", dans un espace des phases à 4 dimensions, demande beaucoup d'imagination !

BIBLIOGRAPHIE

1. N. ROSTOKER, M.N. ROSENBLUTH, Physics of Fluids, 3, 1 (1960)
2. A.A. VLASOV, J. Phys. (USSR), 9, 25 (1945)
3. E.H. LIEB, D.C. MATTIS, Mathematical Physics in One Dimension
Academic Press, New-York - London (1966)
4. L.D. LANDAU, Journal of Physics of USSR, 10, 25 (1946)
5. J.D. JACKSON, Journal of Nuclear Energy (Part C), 1, 171 (1960)
6. O. PENROSE, Physics of Fluids, 3, 258 (1960)
7. N.G. VAN KAMPEN, Physica, 21, 949 (1955)
8. K.M. CASE, Annal of Physics (N Y), 7, 349 (1959)
9. J. DENAVIT, Physics of Fluids, 2, 680 (1968)
10. M. FEIX, Physics Letters, 9, 123 (1964)
11. BUCKLEY, Thèse Cambridge (1968)
12. J.E. DRUMMOND, R.A. GERWIN, B.G. SPRINGER, Journal of Nuclear
Energy (Part C), 2, 98 (1961)
13. L.D. STATON, Thèse Virginia Polytechnic Institute (1968)
14. D. MONTGOMERY, D. GORMAN, Physical Review, 124, 1309 (1961)
15. W.E. DRUMMOND, D. PINES, Nuclear Fusion (Suppl.), 3, 1049 (1962)
16. E.P. VELIKOV, A.A. VEDENOV, R.Z. SAGDEEV, Nuclear Fusion, 1, 82
(1961)
17. J. DAWSON, Physics of Fluids, 5, 445 (1962)
18. O.C. ELDRIDGE, M.R. FEIX, Physics of Fluids, 5, 1076 (1962)
19. P. KELLOG, Physics of Fluids, 8, 102 (1965)

20. K. ESTABROOK, M. WIDNER, I. ALEXEFF, W.D. JONES, Physics of Fluids, 14, 1792 (1971)
21. F.C. GRANT, M.R. FEIX, Physics of Fluids, 10, 696 (1967)
22. T.P. ARMSTRONG, Physics of Fluids, 10, 1269 (1967)
23. T.H. STIX, The Theory of Plasma Waves Mc. Graw Hill (1962)
24. D.C. DE PACKH, Journal of Electronics and Control, 13, 417 (1962)
25. H. L. BERK, K.V. ROBERTS, Methods in Computational Physics, Vol 9
p. 87 Academic Press (1970)
26. P. BERTRAND, M.R. FEIX, Physics Letters, 28A, 68 (1968)
27. G. KALMAN, M.R. FEIX, Editors - Non Linear Effects in Plasma,
Gordon and Breach (1969)
28. F. HOHL, Physics of Fluids, 12, 230 (1969)
29. R. COURANT, D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics, vol 1
chap IV, Interscience (1966)
30. M. LECAR, L. COHEN Symposium on Computer Simulation of Plasma
and Many-Body Problem, N.A.S.A. SP 153 (1967)
31. D. LYNDEN-BELL, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society
136, 101 (1967)
32. F. HOHL, J.W. CAMPBELL, Astronomical Journal, 73, 611 (1968)
33. S. CUPERMANN, A. HARTEN, Astronomy and Astrophysics, 16, 13 (1972)
34. G. JANIN, Astronomy and Astrophysics, 11, 188 (1971)
35. K.V. ROBERTS, H.L. BERK, Physical Review Letters, 19, 297 (1967)
36. I. BERNSTEIN, J. GREENE, M. KRUSKAL, Physical Review, 108, 546 (1957)
37. M.A. BARTON, C.E. NIELSON, Proceeding of the Conference on High Energy
Accelerators - Brookhaven (1961)

38. H.L. BERK, C.E. NIELSON, K.V. ROBERTS, Physics of Fluids, 3, 980 (1970)
39. J.P. DOREMUS, Thèse 3^{ième} cycle, Nancy (1971)
40. J.P. DOREMUS, M.R. FEIX, G. BAUMANN, Physical Review Letters, 26,
725 (1971)
41. G. ROWLANDS, Physics Letters, 30A, 408 (1969)
42. M. NAVET, P. BERTRAND, Physics Letters, 34A, 117 (1971)
43. M. FEIX, Physics Letters, 12, 316 (1964)
44. M.R. FEIX, B. ROOY, Comptes Rendus Académie des Sciences, 270B,
148 (1970)
45. M. NAVET, P. BERTRAND, M.R. FEIX, B. ROOY, L.R.O. STOREY, Journal
de Physique Suppl., 32.C5b, 189 (1971)
46. M.V. KONYUKOV, Soviet Physics JETP, 37, 570 (1960)
47. G. KALMAN, Annals of Physics, 10, 1 (1960) et 10, 29 (1960)
48. J. DAWSON, Physical Review, 113, 383 (1959)
49. E.A. JACKSON, Physics of Fluids, 3, 831 (1960)
50. P. BERTRAND, Thèse 3^{ième} cycle, Nancy (1968)
51. L.K. CHI, L. KRAUS, 9th International Conference on Phenomena in
Ionized Gases, Bucarest (1969)
52. N. KRYLOV, N. BOGOLYUBOV, Introduction to non linear Mechanics,
Princeton University Press, (1947)
53. N. BOGOLYUBOV, Y.A. MITROPOLSKII, Asymptotic Methods in the Theory
of non linear Oscillations, Gordon and Breach, (1961)
54. P. BERTRAND, M.R. FEIX, Journal de Physique, 31, 451 (1970)
55. P. BERTRAND, G. BAUMANN, M.R. FEIX, Physics Letters, 29A, 489 (1969)

56. E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, Modern Analysis, page 133, Cambridge University Press, (1965)
57. J. LEGRAS, Précis d'Analyse Numérique Dunod
58. R.L. DEWAR, J. LINDL, Princeton University, Plasma Physics Laboratory Report, (1971)
59. T.P. COFFEY, Physics of Fluids, 14, 1402 (1971)
60. F.C. GRANT, M.R. FEIX, Physics of Fluids, 10, 1356 (1967)
61. B.D. FRIED, S.D. CONTE, The Plasma Dispersion Function, Academic Press, (1961)
62. M.R. FEIX, P. BERTRAND, Proceedings of the 5th Conference on Numerical Simulation of Plasma, Iowa City, (1971)
63. W.M. LEAVENS, Physics of Fluids, 10, 2708 (1967)
64. P. WEISGLAS, Physical Review Letters, 10, 206 (1963)
65. J.V. PARKER, J.C. NICKEL, R.W. GOULD, Physics of Fluids, 7, 1489 (1964)
66. E.A. JACKSON, M. RAETHER, Physics of Fluids, 9, 1257 (1966)
67. G. DORMAN, Journal of Plasma Physics, 3, 387 (1969)
68. R.M. MIURA, E.M. BARSTON, Journal of Plasma Physics, 6, 271 (1971)
69. F. ENGELMANN, M. FEIX, E. MINARDI, Il Nuovo Cimento, XXX, 830 (1963)
70. P. BERTRAND, M.R. FEIX, G. BAUMANN, Journal of Plasma Physics, 6, 351 (1971)
71. E.T. WHITTAKER, G.N. WATSON, Modern Analysis, chap XIX, Cambridge University Press (1965)
72. J.R. PIERCE, Travelling Waves In Tubes, Van Nostrand, (1950)
73. L. BRILLOUIN, M. PARODI, Propagation des ondes dans les milieux périodiques, Masson et C^{1e} Dunod (1956)

74. P. BERTRAND, M. FEIX, G. BAUMANN, Comptes Rendus Académie des Sciences, 270, 1153 (1970)
75. G. KNORR, Physics of Fluids, 11, 885 (1968)
76. G. ROWLANDS, Journal of Plasma Physics, 3, 567 (1969)
77. P. BERTRAND, J.P. DOREMUS, M.R. FEIX; G. BAUMANN, Physics of Fluids
Parution Juillet 1972
78. F. SANTINI, Plasma Physics, 12, 165 (1970)
79. M.R. FEIX, J.P. DOREMUS, G. BAUMANN, Astro physics and Space Science,
13, 478 (1971)
80. M. BLOOMBERG, P. BERTRAND, J.P. DOREMUS, M.R. FEIX, APS Bulletin, 15,
1430 (1970)
81. J.M. DAWSON, Physical Review, 118, 381 (1960)
82. J.M. DAWSON, W.L. KRUER, B. ROSEN, Princeton University, Plasma Physics Laboratory Report (1972)
83. U. FINZI, Plasma Physics, 14, 327 (1972)

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur BERTRAND P.

Nature de la thèse : Doctorat ès Sciences Physiques

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 31 Mai 1972

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY



J.R. HELLUY

— Achevé d'imprimer le 14 juin 1972 à l'A.D.U. - 3, rue Sellier - 54 - NANCY —
— Dépôt Légal n° 995 - Université de Nancy I Editeur - 2ème trimestre 1972 —

